50 años Universidad Nacional de San Luis

Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

Educación a Distancia

MATEMÁTICA PARA INGRESANTES

neu
nueva editorial universitaria

Universidad Nacional de San Luis
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales
Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales

FCEJS

Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

EDUCACIÓN A DISTANCIA

Matemática para Ingresantes

Universidad Nacional de San Luis
Rector: CPN Víctor A. Moriñigo
Vicerrector: Mg. Héctor Flores

RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES
REUN

neu
nueva editorial universitaria

Universidad Nacional de San Luis

Licenciatura en Análisis y Gestión de Datos

EDUCACIÓN A DISTANCIA

Matemática para Ingresantes

Elaboraron el presente documento

Dr. Marcel David Pochulu

Colaboradores

Lic. Jaime Andrés Camaño Meza

Dra. Patricia Galdeano

Dra. María Isabel Zakowicz

50 años Universidad Nacional de San Luis

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales

FCEJS Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales

Matemática para ingresantes: licenciatura en análisis y gestión de datos - Educación a distancia / Marcel David Pochulu... [et al.]. 1ª ed. - San Luis: Nueva Editorial Universitaria - UNSL, 2023. Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-733-382-4

1. Matemática. I. Pochulu, Marcel David.
CDD 510.711

Nueva Editorial Universitaria
Avda. Ejército de los Andes 950
Tel. (+54) 0266-4424027 Int. 5197 / 5110
www.neu.unsl.edu.ar
E mail: unslneu@gmail.com

Directora:
Lic. Jaquelina Nanclares

Director Administrativo
Sr. Omar Quinteros

Administración
Esp. Daniel Becerra

Dpto de Imprenta:
Sr. Sandro Gil

Dpto. de Diseño:
Tec. Enrique Silvage
DG Nora Aguirre

ISBN 978-987-733-382-4
Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723

Avda. Ejército de los Andes 950 - 5700 San Luis

Tabla de contenido

REFERENCIAS


Actividad en el Foro.


Actividad de Reflexión no obligatoria.


Actividad Grupal.


Actividad Individual.


Importante


Glosario.

Página web - Internet.


Sugerencia.


Video.

INTRODUCCIÓN

Uno de los fines más importantes de la matemática para quienes hacen análisis de datos es el de construir modelos que describan situaciones reales. En este sentido, un modelo matemático es una representación simplificada del mundo real con el objeto de estudiar y describir esta realidad, utilizando variables y relaciones entre las mismas. En consecuencia, la matemática se constituye en herramienta y las técnicas derivadas de ellas son fundamentales para abordar problemas concretos de la actividad profesional del analista, permitiendo investigar, describir, comprender y reflexionar sobre los modelos que se aplican.

En este material que acá desarrollamos, abordamos los conceptos fundamentales del Análisis en una variable, los cuales conforman el núcleo central de los conocimientos matemáticos necesarios para explicar y comprender, mediante una firme base matemática, ciertos fenómenos que se presentan en el entorno cotidiano. Para ello, se trabajará con resolución de problemas y actividades de modelización.

En particular, trabajaremos con situaciones problemáticas. Se asume que estas actividades deben promover la formulación de preguntas, la búsqueda de explicaciones, la posibilidad de explorar y explicar las propiedades matemáticas.

El desarrollo de este material tiene por objetivo general contribuir a la alfabetización matemática para ello, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- Comprender los conceptos centrales del Cálculo Diferencial de una variable para resolver problemas.
- Utilizar modelos matemáticos para estudiar fenómenos, anticipar comportamientos variables y proponer soluciones aproximadas a problemas.
- Modelizar matemáticamente procesos variacionales relacionados con el análisis de datos a través de descripciones simplificadas de los fenómenos de la realidad.

El desarrollo del material se llevará a cabo mediante **actividades teórico-prácticas, mediadas por utilitarios de las matemáticas** (software *GeoGebra* en particular). La enseñanza estará centrada en los estudiantes, puesto que se concibe al aprendizaje como el resultado de un proceso sistemático y organizado, el cual tiene como propósito fundamental la reestructuración cualitativa de los esquemas, ideas, percepciones o conceptos de las personas.

Los contenidos serán desarrollados partiendo de los conocimientos previos de los estudiantes con el fin de conectar esos aprendizajes y poder buscar soluciones a los problemas nuevos que se presentarán. La tarea principal del profesor, por encontrarnos en un entorno virtual y de educación a distancia, no lo será la de transmitir conocimientos, sino más bien, fomentar el desarrollo y práctica de los procesos cognitivos de los estudiantes, reconociendo que tienen distintas maneras de aprender, pensar, procesar y emplear la información. Por ello, se considera oportuno privilegiar:

- La actividad del estudiante como una forma facilitadora del descubrimiento, del desarrollo de competencias y de la comprensión matemática,
- El saber hacer respecto al saber, promoviendo las competencias de los estudiantes en la resolución de problemas,

- La aplicación de los conocimientos matemáticos a problemas de la vida cotidiana, y
- La construcción de modelos matemáticos que permitieran describir y analizar fenómenos de otras disciplinas.

Para cada unidad didáctica, los estudiantes dispondrán de ***Material Teórico*** seleccionado de la bibliografía básica, y una serie de ***Videos*** (desarrollados por el prof. Pochulu y otros complementarios disponibles en *YouTube*, los cuales abordan los mismos temas). No obstante, podrán recurrir a otros videos que encuentran en Internet donde se desarrollan los mismos temas. Se asume que el modo en que explica cada profesor/a influye notablemente en la comprensión que alcanzamos sobre tópicos de matemática. En cada semana se tendrá una **Tutoría sincrónica** (no obligatoria) para trabajar las dificultades que se presentan con los contenidos del curso.

Asimismo, se dispone de ***Foros de consultas*** para cada una de las unidades que se definirán de acuerdo a las inquietudes y dudas de los estudiantes. Estos espacios de comunicación se espera que favorezcan el aprendizaje en común.

UNIDAD N° 1

MODELOS FUNCIONALES

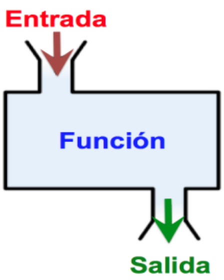
1.1. Modelos funcionales

Iniciamos nuestro estudio abordando algunas nociones básicas referidas a modelos funcionales, los cuales se vienen estudiando desde la escuela secundaria. En consecuencia, repasamos algunos conceptos para ponernos de acuerdo y profundizaremos sobre otros. ¿Dónde estará la diferencia? Nos centraremos en resolver problemas en entornos reales y fundamentalmente haciendo uso de software. Iniciaremos con el uso de la planilla de cálculo de Microsoft Excel y luego nos pasaremos a GeoGebra, que es un programa libre y mucho más potente para el estudio de las matemáticas.

Nuestro foco no estará en graficar las funciones "a lápiz y papel", sino más bien, poder utilizarlas como un recurso que nos permita entender la realidad que nos rodea y modelizarla. No te preocupes que te guiaremos en los primeros pasos.

Comencemos con el repaso de algunos conceptos básicos para ponernos de acuerdo con el vocabulario que usamos.

¿Qué es una función? Una función es una **relación** entre dos o más variables, definida cada una en un conjunto determinado, con la condición de que para cada valor de la variable de entrada o independiente (perteneciente a un conjunto de partida, que en matemática se denomina dominio de la función), le corresponde uno y solo un valor de la variable de salida o dependiente (pertenecientes a un conjunto de llegada, quién matemática denominaremos rango). Esquemáticamente lo podemos representar así.



A las funciones le damos un nombre (costo, demanda, ingreso, utilidades, velocidad, etc.) y las representamos con alguna letra que haga alusión a lo que hablamos, o que entendamos a quién nos referimos, por ejemplo, C, p, I, U, V, etc.

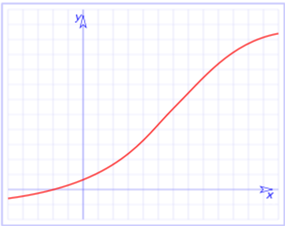
La variable independiente también la representamos con letras. Habitualmente habrás usado la x, aunque no tiene por qué ser siempre esta letra. En la teoría económica, por ejemplo, usamos la q para representar a las cantidades.

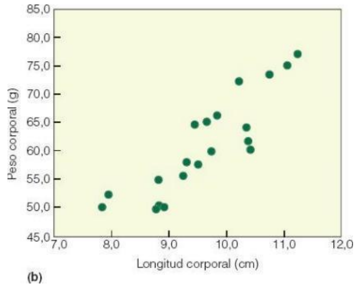
Te invitamos a ver un video donde se aborda el concepto de función y relación.

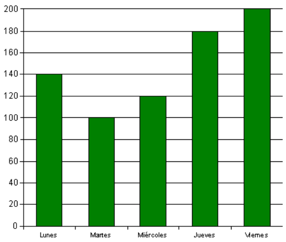
Descripción	Dirección URL
Explicación de los conceptos de relación y función, con algunos ejemplos con conjuntos.	https://youtu.be/Ll7xfe3HoZE

¿Cómo representamos una función? Una función la podemos representar de varias formas:

Mediante gráficos:







Mediante fórmulas o expresiones analíticas:

$$C(q) = 0.02q^2 + 0.1q + 100 \qquad p = -\frac{3}{4}q + 5 \qquad U = 0.08q - 32000$$

Mediante tablas:

TRABAJADORES	UNIDADES	COSTE FIJO	COSTE VARIABLE (TRABAJADORES)	COSTE VARIABLE (MATERIAS PRIMAS)	COSTE TOTAL
0	0	2.000	0	0	2.000
1	20	2.000	1.200	400	3.600
2	40	2.000	2.400	800	5.200
3	60	2.000	3.600	1.200	6.800
4	80	2.000	4.800	1.600	8.400
5	100	2.000	6.000	2.000	10.000
6	120	2.000	7.200	2.400	11.600
7	140	2.000	8.400	2.800	13.200
8	160	2.000	9.600	3.200	14.800
9	180	2.000	10.800	3.600	16.400
10	200	2.000	12.000	4.000	18.000

2014	Magna	Premium	Diesel
Enero	$ 12.22	$ 12.80	$ 12.60
Febrero	$ 12.31	$ 12.91	$ 12.71
Marzo	$ 12.40	$ 13.02	$ 12.82
Abril	$ 12.49	$ 13.13	$ 12.93
Mayo	$ 12.58	$ 13.24	$ 13.04
Junio	$ 12.67	$ 13.35	$ 13.15
Julio	$ 12.76	$ 13.46	$ 13.26
Agosto	$ 12.85	$ 13.57	$ 13.37
Septiembre	$ 12.94	$ 13.68	$ 13.48
Octubre	$ 13.03	$ 13.79	$ 13.59
Noviembre	$ 13.12	$ 13.90	$ 13.70
Diciembre	$ 13.21	$ 14.01	$ 13.81

Elaboración propia Brújula Financier

Te invitamos a ver dos videos donde se abordan conceptos centrales de una función.

Descripción	Dirección URL
Explicación de las diferentes formas de representar una función, mediante expresión analítica, tabla de valoras, parejas ordenadas y gráfica en el plano cartesiano.	https://youtu.be/A7OrJ8IlIeE
Explicación de los conceptos de dominio y rango de una función, analizándolos en las diferentes formas de representación de una función.	https://youtu.be/H40lcwlgPMk

Nuestro objetivo será **realizar pronósticos o inferir comportamientos** de una de las variables, y para ello, será de utilidad contar con fórmulas o expresiones de las funciones, que no siempre están disponibles para el analista, pero generalmente los problemas que estamos resolviendo cuentan con una tabla o un gráfico que no necesariamente permiten determinar con cierta exactitud un valor en particular. No obstante, usaremos software para ayudarnos con ajustes y pronósticos.

En primera instancia, repasamos algunos modelos funcionales básicos que ya se trabajaron en la escuela secundaria.

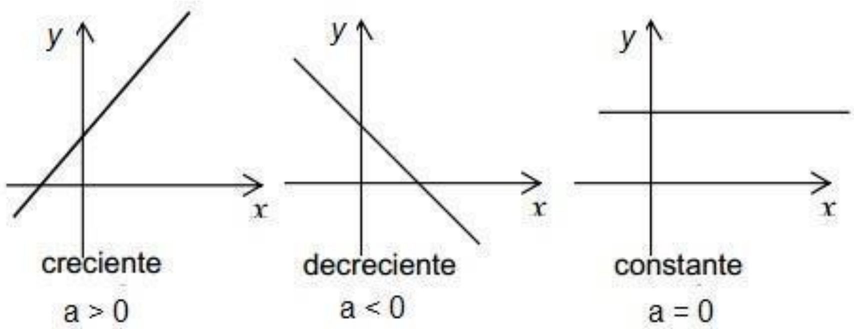
1.2. Modelos lineales

Recordemos en forma global la expresión que caracteriza a una **función lineal**

$$y = ax + b$$

En esta expresión, tenemos dos variables. Una variable de entrada (la x) o variable independiente, una variable de salida (la y) o variable dependiente. También aparecen dos constantes (a y b). El valor de a lo llamamos pendiente, y nos indica la tasa de crecimiento/decrecimiento que la función tiene. Como toda tasa, puede ser negativa, nula o positiva. El valor de b, llamado término independiente u ordenada al origen, corresponde al valor de la variable de salida, cuando la de entrada es igual a cero.

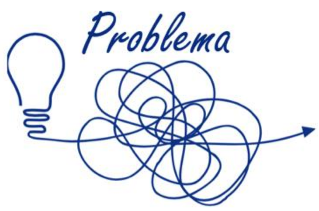
Es importante que interpretemos la información global que arroja un modelo lineal teniendo en cuenta su pendiente o tasa de variación. Gráficamente tendríamos las siguientes posibilidades:



Te invitamos a ver un video donde se aborda el concepto de función lineal.

Descripción	Dirección URL
Primer ejemplo de una forma de graficar la función lineal o de primer grado utilizando una tabla de valores.	https://youtu.be/AoZpzAoC1Qg

Veamos un ejemplo de problema que se puede modelizar con esta función.



Se compran maquinarias por un valor de $10.000 y se determinó que el valor que tendrá en registros contables sufrirá una devaluación del 5% sobre el valor de compra. ¿Qué valor tendrán en registros contables estas maquinarias, conforme pase el tiempo, si no tenemos en cuenta la inflación u otros índices?

Antes de iniciar la resolución, es importante que determinemos cuáles son las variables que intervienen en el problema. En nuestro caso:

Valor que tienen las maquinarias en registros contables. Lo podemos representar con la letra V. Es importante precisar el significado de la variable que interviene. Decir simplemente "Valor" es incorrecto, pues ¿qué valor tiene una maquinaria? Una cosa es en registros contables, otra para fines impositivos, otra si la queremos vender, si la queremos comprar, etc.

Tiempo transcurrido desde la compra. Lo podemos representar con la letra t y se constituye en la variable independiente del problema.

Si no podemos darnos cuenta del tipo de función que relaciona a las variables, podemos hacer una tabla de valores. Esta tabla la haremos en una planilla de cálculo (*Excel* en nuestro caso). Si no has trabajado con planillas de cálculo, te recomendamos ver el siguiente video antes de avanzar.

Descripción	Dirección URL
Crea todo tipo de gráficos en Excel, tanto estadísticos, comparativos o con estilos como las barras, columnas, tortas entre otros estilos que son muy fáciles de usar.	https://youtu.be/BER2KhixV0Y

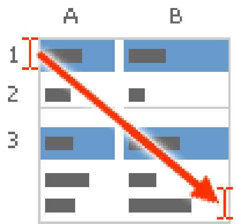
Si ya manejas básicamente *Excel*, podemos comenzar a realizar nuestra tabla de valores como lo muestra la siguiente imagen:

	A	B	
1	Tiempo	Valor de las maquinarias en registros contables	
2	0	10000	
3	1	9500	=B2-0,05*10000
4	2	9000	
5	3	8500	
6	4	8000	
7	5	7500	
8	6	7000	
9	7	6500	
10	8	6000	
11	9	5500	
12	10	5000	

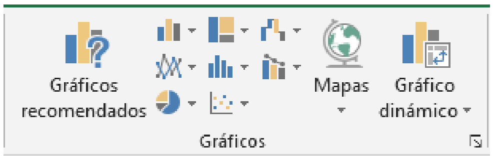
En la última columna se indica la secuencia que deberíamos escribir en la casilla B3 (donde está el 9500). Si luego arrastramos, *Microsoft Excel* nos completará el resto de las columnas. No olvidemos que, al cargar una fórmula en la planilla de cálculo, será necesario colocar el signo igual en primera instancia.

Teniendo la tabla de valores podemos hacer un gráfico de dispersión. Para realizarlo tenés que disponer de los datos que deseás representar. Si los datos los obtenés de una tabla, simplemente se pegan en la primera casilla de la hoja de cálculo (con el comando pegar o presionando CTRL+V). También podrías generar los datos como lo hicimos con nuestro ejemplo. Posteriormente, seleccioná los datos que deseás representar, **excluyendo los encabezados de fila y columna** (no son datos, sino nombres de las variables).

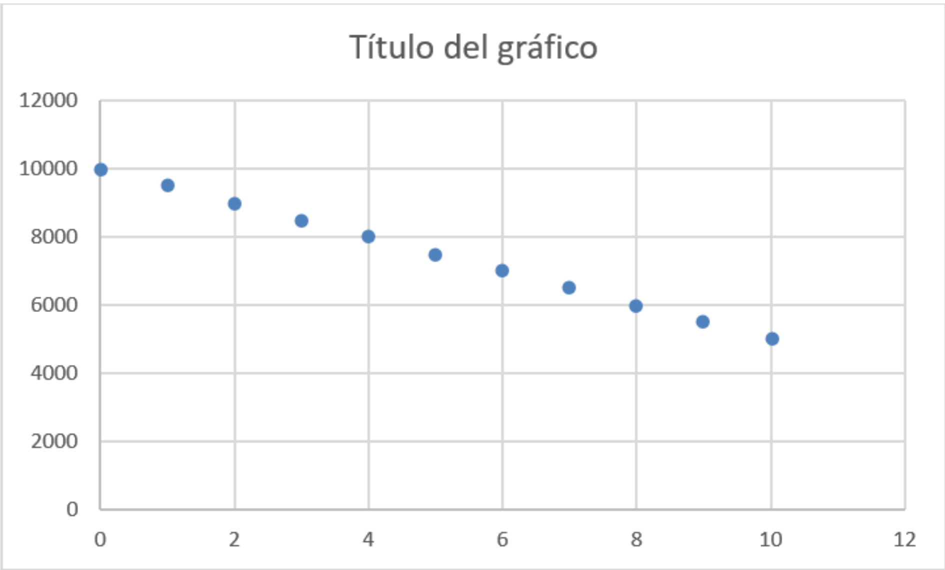
Para seleccionar los datos, tendrás que pulsar con el ratón la casilla superior izquierda y desplazarte hasta la casilla inferior derecha, como lo sugiere la imagen:



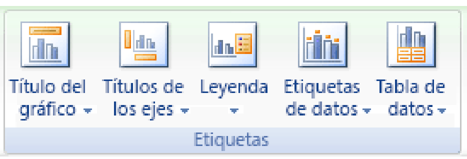
En la ficha **Insertar** y en el grupo **Gráficos**, realizá un clic en **Dispersión**. Podés dejar el mouse en un tipo de gráfico para ver su nombre (si no lo tiene indicado).



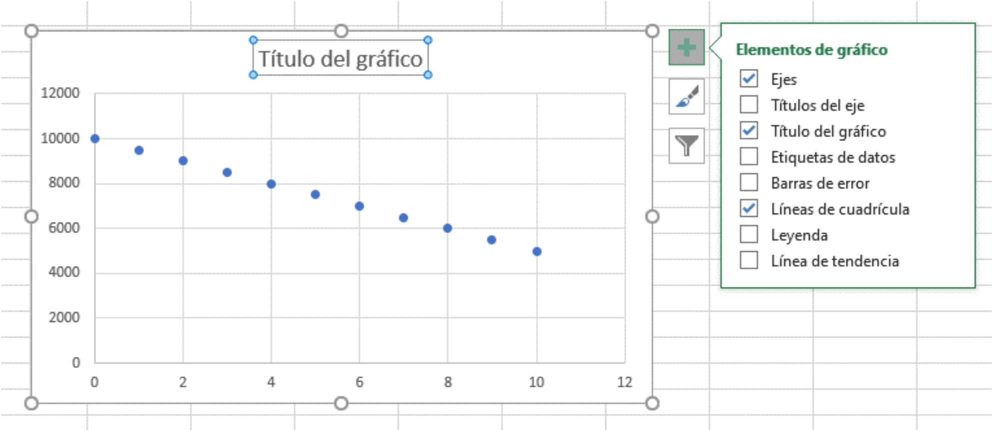
La representación gráfica sería la siguiente:



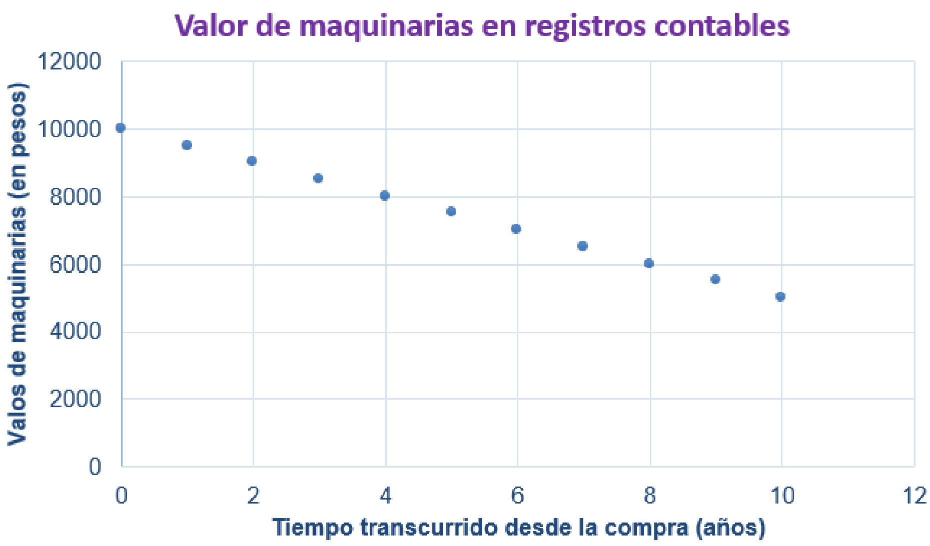
Podemos ponerle un título al gráfico y a los ejes coordenados. Para ello realiza un clic en el área del gráfico y en la pestaña **Presentación** o **Diseño del gráfico**, en el grupo **Etiquetas**, tienes las siguientes opciones:



Podría ocurrir que tu versión de Excel no lo muestre así, sino con un menú contextual como el de la siguiente figura:

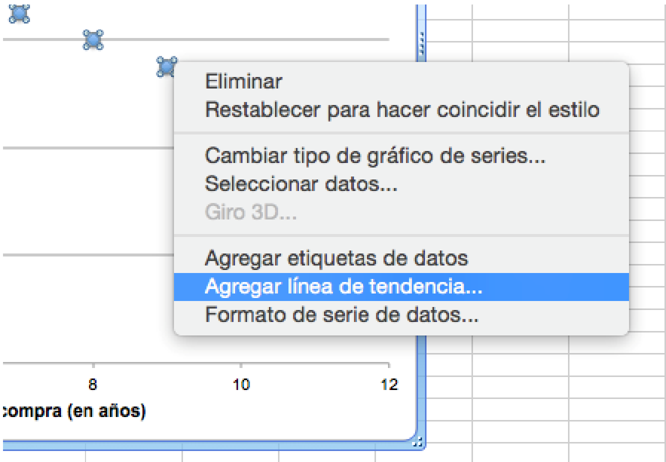


Podrás escribir el texto que quieras, tanto en el título como en los ejes coordenados. Para reducir el tamaño del título del gráfico, realizá un clic con el botón secundario del mouse en el título y escribe el tamaño que desees en el cuadro: **Tamaño de fuente** del menú contextual.

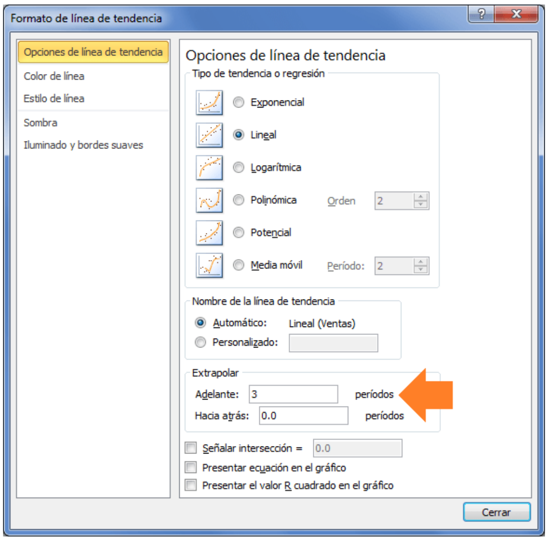


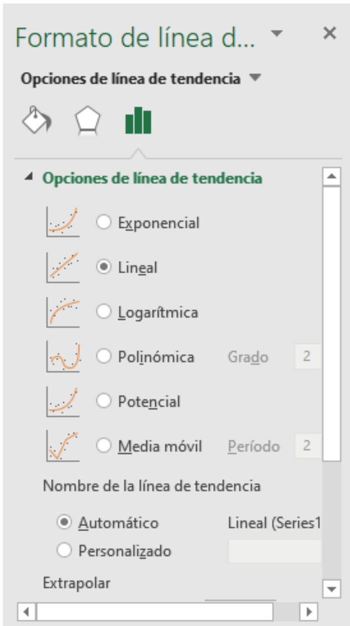
El gráfico de dispersión nos permite apreciar un comportamiento lineal, aunque eso se advertía con anterioridad, cuando analizamos la tabla de valores y podíamos notar que la variable de salida (valor de la maquinaria en registros contables) decrece con igual tasa para cada año que transcurre desde su compra. Ahora podemos ajustar una línea de tendencia (lineal en nuestro caso) y pediremos que nos marque la ecuación y el coeficiente de correlación.

Identificamos una tendencia de decrecimiento, así que también nos gustaría predecir los posibles valores de las maquinarias en registros contables para los próximos 3 años. Para lograrlo tenés que hacer clic con el botón derecho del ratón sobre uno de los puntos graficados y dentro del menú emergente seleccionar la opción: **Agregar línea de tendencia**.



Se mostrará el cuadro de diálogo **Formato de línea de tendencia**. Solamente tenés que asegurarte de especificar el número de períodos que deseas pronosticar (extrapolar). Dependiendo de la versión que tengas de Excel podrá verse como las imágenes que te colocamos a continuación

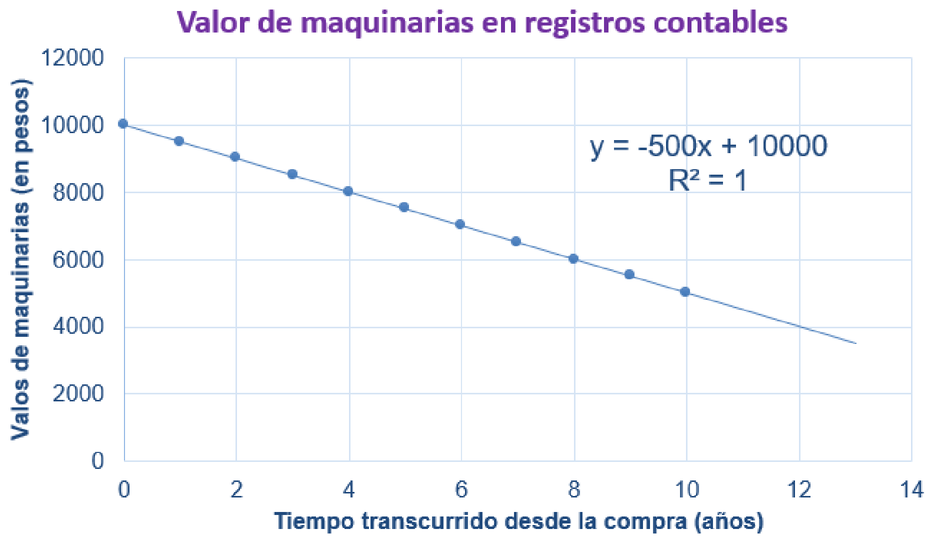




Al cerrar el cuadro de diálogo *Excel* habrá insertado una **línea de tendencia en el gráfico**.

Las **líneas de tendencia** se usan para mostrar gráficamente las tendencias de los datos y ayudar a analizar los problemas de predicción. Este análisis también se denomina análisis de regresión. Mediante el análisis de regresión, puede extender una línea de tendencia en un gráfico más allá de los datos reales para predecir los valores futuros. Por ejemplo, el gráfico utiliza una línea de tendencia lineal simple que es la previsión para los próximos tres años, y para mostrar claramente la disminución del valor de las maquinarias en registros contables al transcurrir el tiempo.

El gráfico final nos quedará de la siguiente manera:



Esto es, la función que buscábamos es:

$$V=10000-500t$$

Podemos observar que su tasa de variación es negativa (-500) y es importante asociar las cuestiones teóricas con lo que obtenemos de la práctica.

> Si tenés dificultades para realizar las gráficas en *Excel*, o la versión del programa que estás usando no coincide con la que te explicamos aquí, no pierdas de vista que hoy casi toda la información está en Internet. Es suficiente que pongas las palabras claves en cualquier buscador, o si lo preferís, encuentres videos en *YouTube* donde te lo explican.
>
> Lo importante es que te vuelvas autodidacta, pues en el mundo laboral te vas a encontrar muchas veces con cosas que no sabés hacer y tendrás acceso a los recursos para buscar la información donde te lo explican.

Te invitamos a ver la resolución del problema anterior usando el software GeoGebra, el cual seguramente ya trabajaste en la escuela secundaria, o sino, te enseñaremos a trabajar con él.

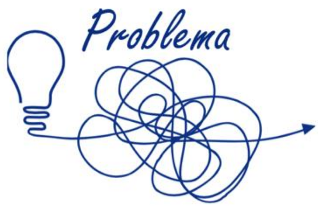
Descripción	Dirección URL
Problema Nº 1	https://vimeo.com/ucasal/review/394930046/ad296fadcb

La descarga del programa GeoGebra la podés realizar del sitio oficial cuya dirección te dejamos a continuación. Tenés dos opciones: *GeoGebra* Clásico 5 y GeoGebra Clásico 6. En particular, te recomendamos que descargues GeoGebra Clásico 5, pues *GeoGebra* Clásico 6 está pensado para estructurar y presentar el contenido para la web.

Descripción	Dirección URL
Descarga de GeoGebra	https://www.geogebra.org/download?lang=es

1.3. Modelos exponenciales

Supongamos que cambiamos algunas de las condiciones del problema, y lo enunciamos del siguiente modo:



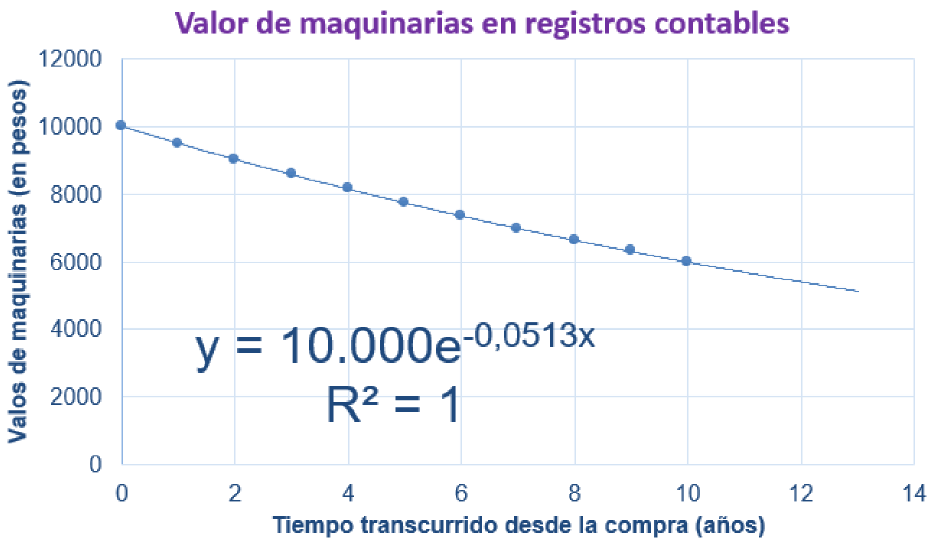
Se compran maquinarias por un valor de $10.000 y se determinó que el valor que tendrá en registros contables sufrirá una devaluación del 5% sobre el valor del año anterior. ¿Qué valor tendrán en registros contables estas maquinarias, conforme pase el tiempo, si no tenemos en cuenta la inflación u otros índices?

Si comparamos este problema con el anterior, la diferencia radica en que se devalúa un 5% pero no sobre el valor de compra, sino sobre el valor del año anterior. Cada año nos quedamos con un 95% del valor de las maquinarias, pues se devalúa un 5%. Ahora bien, ese 5% que descontamos no es el mismo para cada año pues cambia el valor que tienen las maquinarias en registros contables. Diferente es descontar cada año un 5% del valor de compra, el cual es un valor constante. Si procedemos a hacer una tabla tendremos:

	A	B	C	D
1	Tiempo	Valor de las maquinarias en registros contables		
2	0	10000		
3	1	9500	=	B2*0,95
4	2	9025	=	B2-0,05*B2
5	3	8573,75		
6	4	8145,0625		
7	5	7737,809375		
8	6	7350,918906		
9	7	6983,372961		
10	8	6634,204313		
11	9	6302,494097		
12	10	5987,369392		

Notemos que al cargar la fórmula podemos hacerlo de dos maneras: (a) calculando el 95% de la cantidad anterior, (b) a la cantidad anterior, le descontamos el 5% de la misma.

La representación gráfica resulta:



Podemos ver que el modelo de ajuste fue una función exponencial, y para este problema resulta:

$$V = 10000e^{-0,051293t}$$

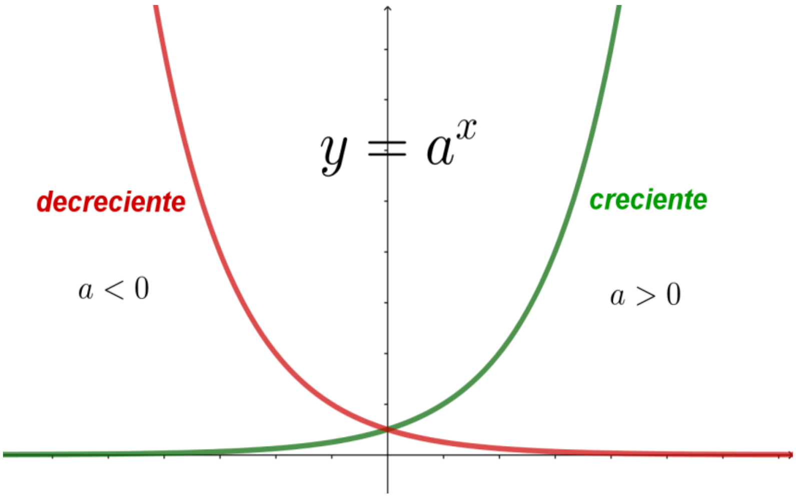
La cantidad de dígitos se obtiene solicitando a *Excel* que nos muestre mayor cantidad de decimales. Nos encontramos frente a otro modelo funcional. Recordemos en forma global las características de los modelos exponenciales.

1.3.1. Caracterización de los modelos exponenciales

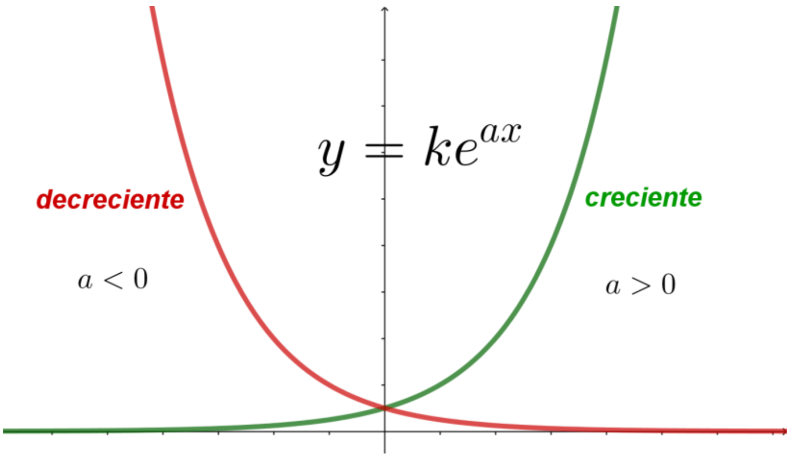
Los modelos exponenciales se caracterizan por contener a la variable de entrada (o independiente) en el exponente de una expresión. Básicamente tienen el siguiente formato:

$$y = k \cdot e^{a \cdot x} \qquad\qquad y = k \cdot a^{x}$$

La representación gráfica nos quedará, en forma general, de dos maneras posibles. En el primer caso si la base es un número real positivo cualquiera distinto de 1.



Si la base es el número irracional e, base de los logaritmos naturales o neperianos, dependerá del signo que tenga "a" en el exponente y el valor de la constante k. Así resulta, para valores de k positivos:



Te invitamos a ver un video donde se aborda el concepto de función exponencial y así se afianzan algunas cuestiones teóricas.

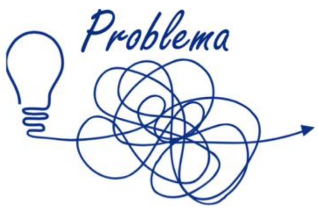
Descripción	Dirección URL
Conceptos básicos de la función exponencial y resolución de problemas	https://youtu.be/_8z0_se3IB0

Te invitamos a ver la resolución del problema anterior usando GeoGebra.

Descripción	Dirección URL
Problema Nº 2	https://vimeo.com/ucasal/review/394923876/be1457417d

1.4. Modelos funcionales polinómicos

Continuamos profundizando el tema que nos convoca: Resolver problemas donde es necesario ajustar un modelo funcional para realizar predicciones o anticipaciones. Hasta ahora estuvimos viendo modelos lineales y exponenciales, y en esta, veremos otros más acordes al problema que vayamos encontrando. Empecemos con un problema básico:



El próximo sábado se reunirán los egresados de una institución para festejar un nuevo aniversario. Analizar y fundamentar si es posible anticipar el número máximo de saludos no repetidos que se realizarán esa noche.

Como vemos, es un problema que se encuentra en un registro verbal donde parece que no hay datos numéricos. ¿Qué variables entran en juego? ¿Cuál sería nuestra variable de entrada y cuál la de salida? La variable de entrada será el número de personas, que podemos representar con la letra n. Como variable de salida tendremos el número máximo de saludos.

Para continuar, hace falta que nos pongamos de acuerdo con el significado de “saludo”. ¿Cuándo contaremos un saludo? Porque alguien puede movernos la mano, decirnos un hola, abrazarnos, darnos un beso, etc. Busquemos en Internet algún significado que nos parezca apropiado.

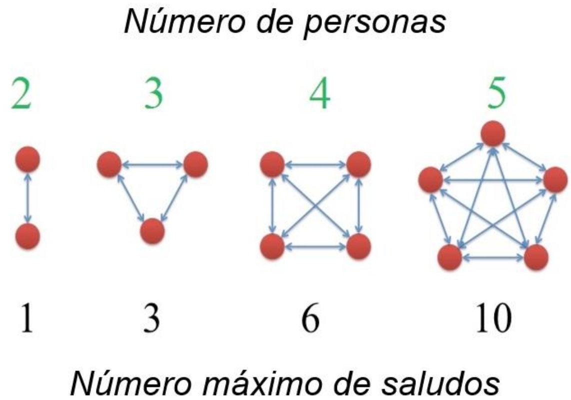
Descripción	Dirección URL
Wikipedia	https://es.wikipedia.org/wiki/Saludo

El primero que aparece es el siguiente:

Palabra, expresión, gesto o cualquier otro acto que una persona dirige a alguien cuando se encuentran o se despiden, dando muestras de atención, cortesía o afecto.

Entonces, un saludo se contará entre dos personas cuando una o ambas realicen cualquier gesto. Como tenemos que contar la máxima cantidad de saludos, si una persona dice "hola" a un grupo, no tendremos un máximo. Habrá que contar los saludos que realiza a cada integrante del grupo en forma individual.

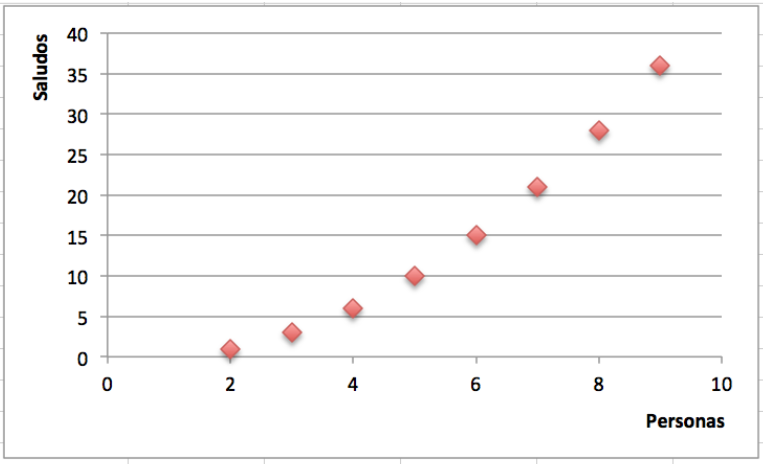
Realicemos un conteo para casos particulares y un número de personas bajo. No tiene sentido contar la cantidad máxima de saludos que efectúan 120 personas. La idea es encontrar algún patrón de comportamiento entre las dos variables y para ellos podemos considerar números pequeños.



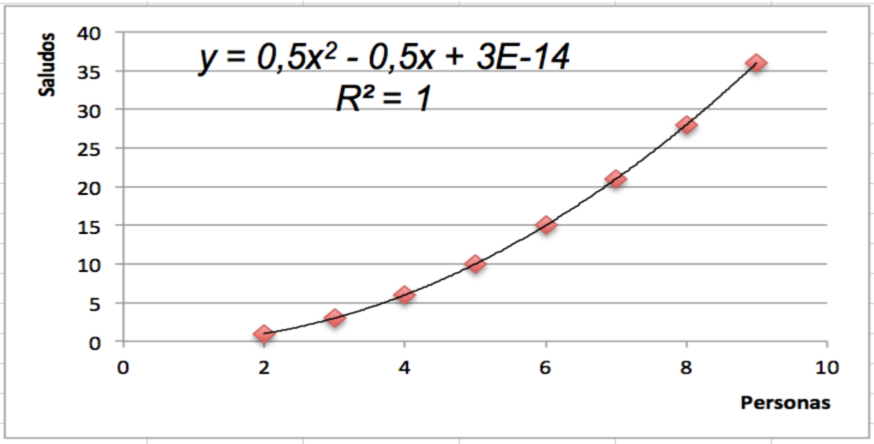
Podemos organizar una tabla donde contemos la cantidad de saludos entre las personas. Incluso, podemos inferir cuál es el comportamiento entre las variables, aunque no tengamos una fórmula aún. En la tabla, organizamos la información en dos columnas, donde la primera (número de personas) constituye la variable independiente, y la segunda, el número de saludos, será la variable dependiente. ¿Te das cuenta cómo se incrementa el número de saludos al aumentar el número de personas? Fijate la variación que existe entre ellos.

	A	B
1	Personas	Saludos
2	2	1
3	3	3
4	4	6
5	5	10
6	6	15
7	7	21
8	8	28
9	9	36

Si analizamos la tabla podemos advertir que no se trata de un modelo lineal, pues la tasa de crecimiento de la variable de salida, o dependiente, no es constante. Podríamos pensar que se trata de un modelo exponencial, en función de los que conocemos hasta ahora. Pero hagamos un gráfico de dispersión que nos ayude a visualizar el comportamiento entre las dos variables.



Si ajustamos una línea de tendencia con Excel que realice el mejor ajuste y pedimos la fórmula y coeficiente de dispersión tendremos:



El modelo funcional que está de fondo es una función polinómica de segundo grado. Ahora bien, ¿qué significado tiene para nosotros el término independiente que nos arrojó *Excel*? Pensemos que el término independiente correspondería a la cantidad de saludos si no asisten personas a la fiesta.

Esa expresión denota a un número muy pequeño: $3 \cdot 10^{-14}$. Esto significa que es el número 0,00000000000014, el cual es despreciable para nosotros. No olvidemos que el ajuste que hace *Excel* puede involucrar errores al brindarnos la fórmula de la tendencia que pedimos. Entonces, la fórmula de ajuste que buscábamos es:

$$S = 0{,}5 \cdot n^2 - 0{,}5 \cdot n$$

En esta fórmula, la S representa el número de saludos máximo que podríamos tener ante n personas que asisten a la fiesta. Teniendo una expresión que relacione ambas variables podemos hacer las predicciones que necesitemos. Por ejemplo ¿qué cantidad de saludos máxima tendríamos en una fiesta en la que asistieron 120 personas?

$$S(120) = 0{,}5 \cdot 120^2 - 0{,}5 \cdot 120 = 7140$$

Repasemos ahora algunas cuestiones básicas sobre los modelos polinómicos de segundo grado.

Te invitamos a ver la resolución del problema anterior usando GeoGebra.

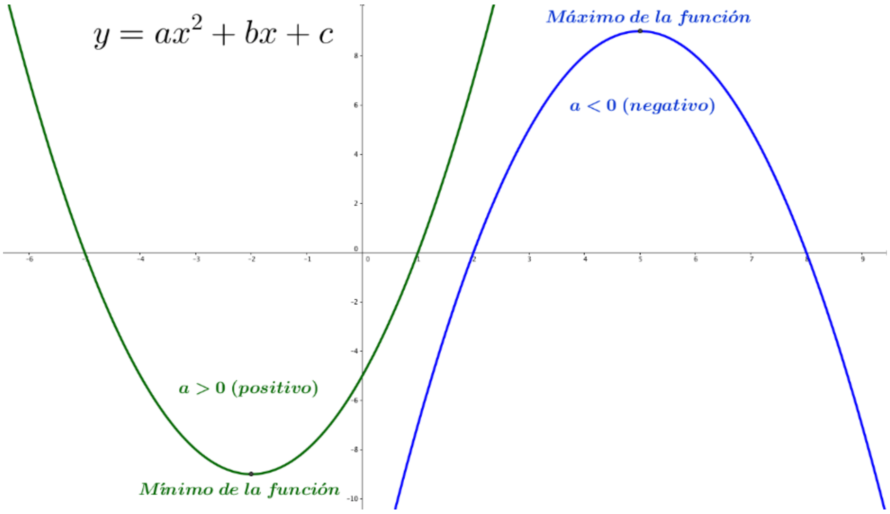
Descripción	Dirección URL
Problema Nº 3	https://vimeo.com/ucasal/review/394925167/02cf17881a

1.4.1. Modelos polinómicos de segundo grado

Un modelo polinómico de segundo grado tiene por expresión analítica:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde a es un número real distinto de cero. Eso quiere decir que es positivo o es negativo, dando lugar a dos tipos de gráficos distintivos como vemos en la imagen.



Para calcular la coordenada "x" del vértice lo hacemos mediante el siguiente cálculo:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Para calcular la coordenada "y", simplemente reemplazamos en la expresión de la función polinómica. Esto es, teniendo el valor de entrada, obtenemos el de salida.

Si lo que estamos buscando es calcular las raíces, valores de la variable de entrada que hacen cero a la función o variable de salida, empleamos la siguiente fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Te invitamos a ver un video donde se abordan estas nociones que te contamos sobre las funciones polinómicas de segundo grado.

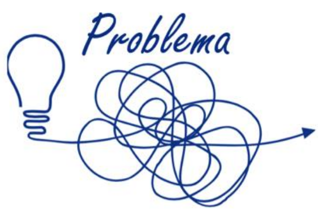
Descripción	Dirección URL
Explicación de una forma de graficar funciones cuadráticas encontrando el vértice y puntos mediante una tabla de valores	https://youtu.be/6JQw45YO3Fs

Para pensar y reflexionar: Supongamos que nos proporcionan los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) y sustituimos en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, conformando un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de a, b y c, ¿a qué conclusión llegarías si el sistema de tres ecuaciones no tiene solución?

1.5. Aplicaciones de modelos funcionales

1.5.1 Modelos funcionales para demanda y oferta

Ya hemos repasado tres tipos de modelos: lineales, exponenciales y polinómicos de segundo grado. Resolvamos otro problema que ponga en juego estas ideas.



Un estudio de mercado determinó el comportamiento que sufre la demanda de los consumidores ante la variación de precios. Se sabe que para un precio de $5 por kg. se demandarán 1600 kg. de un producto. Si el precio se duplica, la cantidad demandada por los consumidores llegaría a ser de 900 kg, mientras que si el precio es de $20 por kg., la cantidad demandada se reduce a 100 kg. Determine la ecuación de la demanda y pronostique la cantidad demanda para 3000 kg. ¿Qué cantidad se demandará con un precio de mercado de $25? Fundamenta tu respuesta.

La ecuación de demanda es una función que expresa la relación que existe entre q y p, donde q es la cantidad de kilogramos que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio p. Es normal que si los precios bajan los consumidores estarán dispuestos a comprar mayor cantidad del producto, por lo cual la gráfica de la ecuación suele ser decreciente. Esta gráfica también es conocida como curva de demanda y tiene sentido dibujarla para valores de p y q positivos.

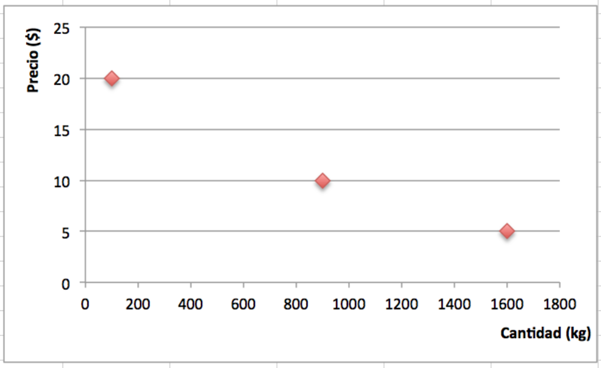
Los economistas suelen representar en el eje de las "y" o de ordenadas al precio mientras que en el eje de las "x" o abscisas a la cantidad q. En consecuencia, la variable de entrada será la cantidad y el precio será la de salida.

Te invitamos a leer sobre los conceptos que abordamos anteriormente, pues los usaremos en muchos de los problemas que te vamos a proponer.

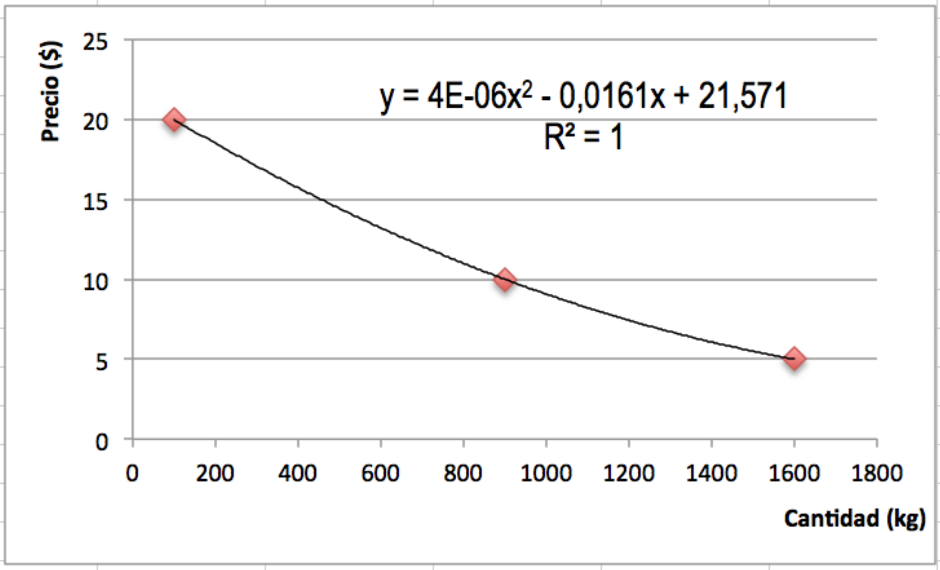
Descripción	Dirección URL
Wikipedia	https://es.wikipedia.org/wiki/Oferta_y_demanda

Si hacemos una tabla en *Excel* y realizamos el diagrama de dispersión tendremos lo siguiente:

	A	B
1	Cantidad (kg)	Precio ($)
2	1600	5
3	900	10
4	100	20



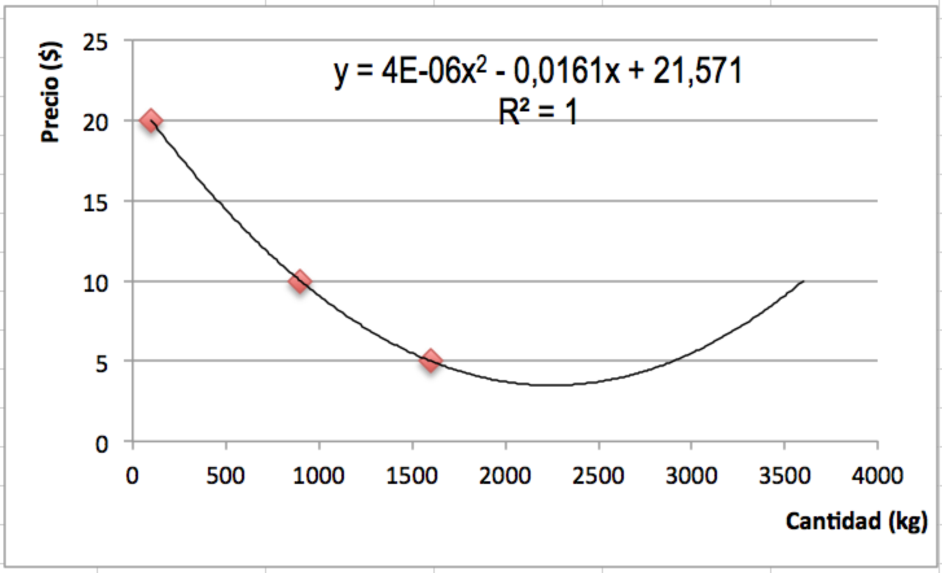
Analizando la tabla y la gráfica podemos advertir que no necesariamente se corresponde con un modelo lineal. En consecuencia, nos aventuramos con un modelo polinómico de segundo grado. La gráfica, junto a su expresión analítica y coeficiente de determinación es la siguiente:



El coeficiente de determinación es igual a 1, con lo cual el modelo explica el 100% de los casos. ¿Esto significa que encontramos el mejor modelo de ajuste para hacer la estimación pedida? Ciertamente no y veamos las razones.

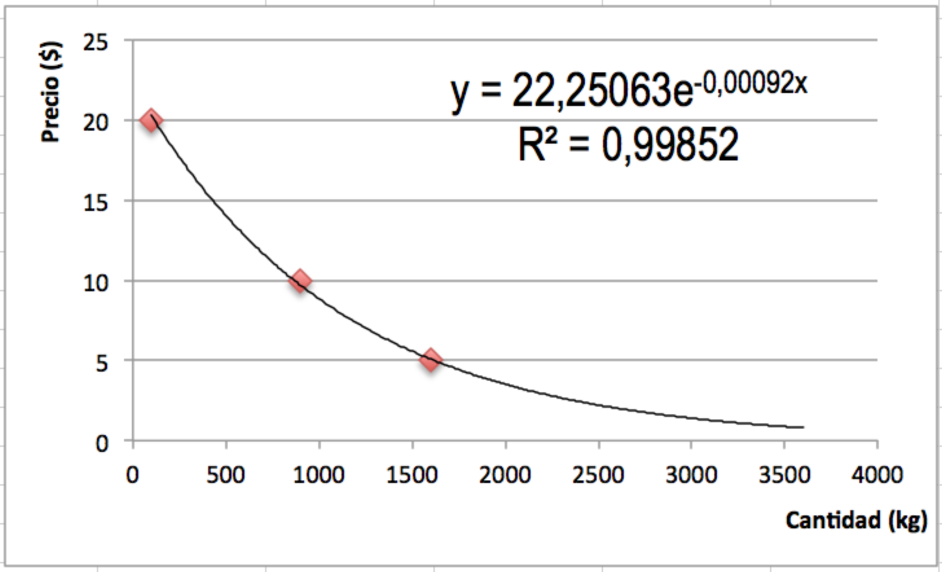
Nos piden predecir el precio para una demanda de 3000 kg., por lo que estamos frente a un caso de extrapolación. Es decir, tenemos que estimar más allá del intervalo de observación original (entre 100 y 1600 para nuestro caso) el valor que tendrá la otra variable (precio) suponiendo que el curso de los acontecimientos continuará en el futuro siguiendo alguna regla o modelo.

Para ello pedimos a Excel que nos muestre, al menos 2000 valores hacia adelante para la variable de entrada. La gráfica resultante es la siguiente:



Si tenemos presente que estamos buscando una ecuación de demanda y que la misma debiera corresponder a una función decreciente, **no es lógico el comportamiento que estamos teniendo**. En consecuencia, por más que el coeficiente de determinación sea igual a 1, el modelo no describe adecuadamente el comportamiento de la demanda.

Nos aventuramos ahora con un modelo exponencial:



Observando este modelo y su coeficiente de determinación (que es muy bueno, pues es muy próximo a 1 incluso) podemos decir que la ecuación de demanda tendría la siguiente expresión:

$$p = 22{,}25063e^{-0{,}00092q}$$

Nos resta ahora calcular el precio esperado para una demanda de 3000 kg. de los consumidores. Reemplazando este valor en la ecuación de demanda nos arroja un precio de $ 1,41 por kilogramo.

En síntesis, cuando busquemos ajustar una línea de tendencia para que describa un fenómeno, nuestro objetivo no será únicamente mirar el coeficiente de determinación. El foco será analizar globalmente el problema y establecer si la función que proponemos describe adecuadamente el fenómeno.

Te invitamos a ver la resolución del problema anterior usando GeoGebra.

Descripción	Dirección URL
Problema Nº 4	https://vimeo.com/ucasal/review/394926372/0d1496cc57

Te proponemos la resolución de un problema, referido a oferta y podrás discutir su resolución en el foro. Tené presente que somos una comunidad de aprendizaje y que entre todos podemos aprender. La participación en el foro no es obligatoria, pero sí recomendada.

Problema para discutir en el foro:

Un estudio de mercado determinó el comportamiento que sufre la oferta de los productores ante la variación de precios. Se sabe que para un precio de U$S 6 por kg serían ofertados 300 kg. de un producto. Si el precio es de U$S 14 por kg la cantidad ofertada por los productores llegaría a ser de 600 kg, mientras que si el precio es de U$S 26 por kg, la cantidad ofertada asciende a los 1200 kg.

a) Determina y fundamenta cuál sería una ecuación de oferta apropiada para el caso
b) Pronostica el precio para una oferta de 3000 kg. Justifica la respuesta.
c) Pronostica la cantidad ofertada para un precio de U$S 35. Justifique la respuesta.

Para pensar y reflexionar:

¿Qué significado tiene la intersección de la función de oferta o de la demanda con los ejes coordenados? ¿te parece siempre válida esta interpretación?

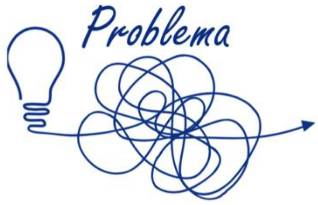
¿Podríamos ajustar una función de oferta o de demanda con una función polinómica de segundo grado? ¿por qué sí o por qué no? *Nota*: leer el ejemplo 10 de la página 241 de la bibliografía básica de Matemática II, y el ejemplo 11 de la página 242.

¿Es razonable pensar comportamientos lineales para la oferta y la demanda? ¿por qué sí o por qué no?

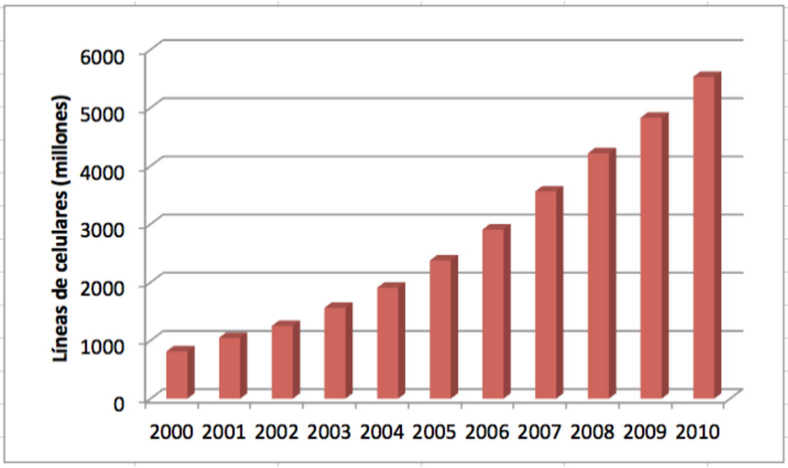
¿Qué se supone al incluir una sola variable de precio en las funciones de la oferta o demanda?

1.5.2 Estimación de comportamientos de variables

Realicemos otro problema más donde pongamos en juego los conocimientos que venimos construyendo:

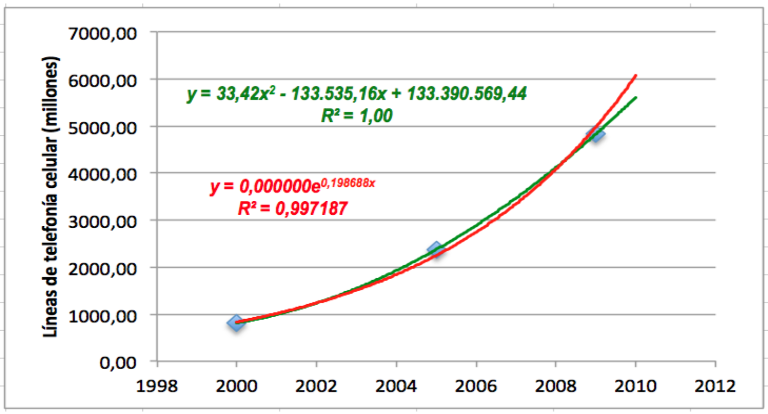


La Unión Internacional de Telecomunicaciones (UIT) realizó en 2011 un estudio sobre la evolución que tuvieron las líneas de telefonía celular. Los datos se reflejan en la figura que se muestra a continuación.



Para el año 2000 se estimó que existían 813 millones de líneas telefónicas, mientras que para el 2005 se tenían 2375 millones de líneas y para el año 2009 un total 4828 millones de líneas. Estima cuántas líneas de telefonía celular había para el año 2007 y 2010. Compara los resultados con los que muestra la gráfica y elabora una conclusión referida al modelo matemático que propusiste.

Con los datos del problema realizamos una tabla de Excel y le ajustamos una línea de tendencia. Nuestra variable de entrada será el año calendario y la variable de salida será la cantidad de líneas de telefonía celular (en millones). Para el ajuste de la línea de tendencia tendremos en cuenta el comportamiento global de las variables involucradas. Podemos ver que es posible ajustar un modelo polinómico de segundo grado o un modelo exponencial. Además, como necesitamos hacer una extrapolación, pediremos que se muestre al menos un período hacia adelante. Ambos ajustes se muestran en la siguiente gráfica:



Los modelos tienen un buen coeficiente de determinación, pero en este caso, nos quedarnos con el modelo polinómico de segundo grado, en tanto parece describir bastante bien la tendencia de crecimiento de líneas de telefonía celular (en crecimiento, pues no tiene una tasa de crecimiento tan abrupta como lo marca el modelo exponencial).

En consecuencia, si con T representamos a la cantidad de líneas de telefonía celular (en millones) y con t al año calendario, tendremos:

$$T = 33{,}42t^2 - 133535{,}16t + 133390569{,}44$$

Ahora bien, cabe preguntarnos: ¿este modelo ajusta adecuadamente? No olvidemos que *Excel* trabaja con aproximaciones y que la cantidad de decimales suele ser decisiva. Probemos lo que ocurre con los datos suministrados, es decir, para el año 2000, 2005 y 2009, cuyos resultados se deberían corresponder con los valores dados:

$$T(2000) = 249{,}44$$

$$T(2005) = 1809{,}14$$

$$T(2009) = 4260{,}02$$

Es evidente que el modelo no aproxima los datos que tenemos siendo que el coeficiente de determinación resultó ser igual a uno. En consecuencia, debemos considerar más decimales para el modelo funcional, y esto se lo pedimos al software utilizado. Como estamos hablando de millones de líneas de telefonía celular, pidamos que nos muestre hasta 6 dígitos después de la coma. El modelo resultante es el siguiente:

$$T = 33{,}420139t^2 - 133535{,}15625t + 133390569{,}444445$$

Probemos ahora si ajusta adecuadamente:

$$T(2000) = 812{,}944445$$

$$T(2005) = 2375{,}44667$$

$$T(2009) = 4828{,}573454$$

Este último modelo sí ajusta, aproximadamente, los datos que tenemos. Entonces podemos utilizarlo para predecir lo que acontece para el año 2007 y 2010. Redondeamos los resultados a números enteros:

$$T(2007) = 3468$$

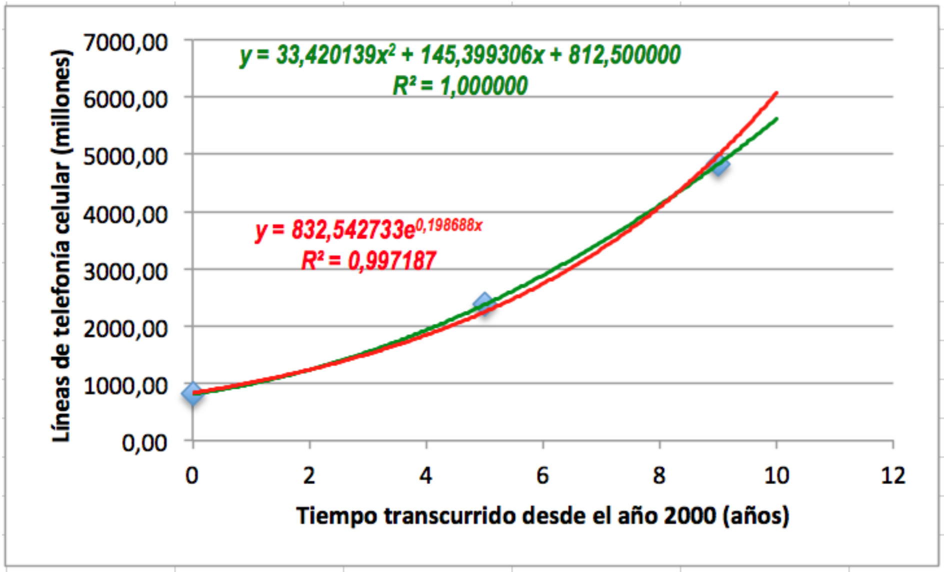
$$T(2010) = 5610$$

Cotejando estos valores con la gráfica dada para el problema podemos observar que coinciden aproximadamente, por lo cual el modelo resulta bastante apropiado.

Retomemos ahora el ajuste de los datos por medio de un modelo exponencial, pues arroja un resultado interesante. Excel realiza aproximaciones, pero el valor que muestra de la constante es nulo ¿esto es posible? Con certeza no, pues sino la función sería nula, lo cual no es cierto. **Estas cuestiones de aproximaciones y redondeo no debemos descuidar en los problemas.**

Asimismo, hemos tomado como variable el año calendario, y podríamos haber considerado los años transcurridos desde el año 2000. Esto es, el año 2000 corresponde para el tiempo $t = 0$.

La representación gráfica y expresión analítica de ambos ajustes habría quedado así:



Notemos que aquí no se nos presenta el problema con el modelo exponencial donde la constante resultaba ser nula, lo cual invalidaba la expresión si la queríamos tomar así.

Para el último problema hemos considerado líneas de ajuste que son continuas. Esto quiere decir que estamos asumiendo que las variables pueden tomar cualquier valor dentro del conjunto de los números reales. No obstante, hay que ser cuidadoso con estas representaciones y tener en cuenta los dominios y rangos restringidos del modelo funcional que proponemos.

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

Objetivos:

Con este Trabajo práctico nos proponemos evaluar tus competencias para:

- Analizar funciones a través de diferentes registros de representación (gráfico, fórmula, tabla).
- Ajustar adecuadamente modelos funcionales a problemas contextualizados.
- Interpretar y anticipar comportamientos de distintos fenómenos.

Actividad Individual.

Para el trabajo práctico no te suministramos las respuestas pues queremos que las discutas en el **Foros de consultas** y partícipes elaborando una wiki con tus compañeros. ¿Qué es una wiki? Es un sistema de trabajo informático utilizado en los sitios web que permite a los usuarios modificar o crear su contenido de forma rápida y sencilla. En nuestro caso, accederás a ella en la sección de trabajos prácticos y tendrás que colaborar:

(1) Incluyendo respuestas a los problemas del práctico.

(2) Complementando la información que brindó otra persona.

(3) Refutando la resolución que hizo otra persona.

Actúa como líder y toma la iniciativa. No esperes que otros hagan el trabajo de proponer las soluciones a los problemas y solamente te limitas a controlar tus respuestas. Tené presente que:

> "Nadie sabe todo, todos saben algo,
> todo el conocimiento reside en la humanidad"
>
> Pierre Levy (1999)

ACTIVIDADES

Problema 1: Supongamos que tenemos la siguiente relación entre cantidad demandada (en miles de kilogramos) y precio, en dólares:

Cantidad (miles de kg.)	Precio por kilogramo (U$S)
20	4.69
25	4.03
30	3.47
35	2.99
40	2.57
45	2.21
50	1.90

a) Determina una ecuación de demanda y fundamenta tu respuesta.
b) Determina el precio para una demanda de 55 mil kilogramos de producto y explica el significado que tiene esta estimación.
c) Determina la cantidad demandada para un precio de U$S 4,50 el kilogramo y explica el significado que tiene esta estimación.

Problema 2: Para la producción de cierto producto se tienen costos fijos de $80.000 y costo variable de $15 por kilogramo producido.

a) Ajusta una función que exprese la relación que existe entre el costo total de producción y la cantidad de kilogramos producidos de un producto.
b) Si se establece un máximo de producción de 50.000 kilogramos, determine el dominio restringido y el rango para esta función del costo.
c) Realiza una gráfica de la función, colocando títulos y rótulos adecuados en los ejes.

Problema 3: Se sabe que para un precio de $100 por artículo, se demandarán 300 mil unidades del mismo, mientras que para un precio de $140, la demanda será de 180 mil unidades.

a) Encuentra una *función de demanda* que exprese la cantidad demandada de un producto q como una función del precio cobrado del producto p, expresado en pesos. ¿Es único el modelo de ajuste para este caso? Fundamenta la respuesta.
b) Anticipa la cantidad demanda si el precio se fija en $130.

Problema 4: Una compañía de seguros tiene un método simplificado para determinar la prima anual para una póliza de seguro de vida. Se cobra una cuota anual sencilla de U$S150 anuales para todas las pólizas más U$S 2.50 por cada mil dólares de la cantidad de la póliza. Por ejemplo, una póliza de U$S 20.000 costaría U$S 150 por la cuota fija más U$S 50, que corresponden al valor nominal de la póliza. Determina una función que se pueda utilizar para calcular las primas anuales y fundamenta su elección.

Problema 5: Una agencia de alquiler de automóviles española alquila coches y furgonetas. A su vez, al precio por día se le aplica una tasa de € 0,08 por kilómetro conducido, con un límite diario en la cantidad de kilómetros a recorrer.

a) Determina una función que exprese el costo de alquiler de un automóvil de porte mediano, si se hace un contrato por un mes.
b) Realiza una gráfica de la función indicando dominio y rango restringidos de la misma.
c) ¿Cuánto habría pagado una persona al finalizar el contrato si en el mes recorrió 2357 kilómetros?

Problema 6: En enero del 2015 se compró un automóvil por $180.000 para una empresa y se establece que el valor que tendrá en registros contables se devaluará a razón del 5% <u>del valor de compra</u> por cada año transcurrido.

a) ¿Qué valor se estima tendrá en registros contables para el año 2020, prescindiendo de la inflación y otros índices? Fundamenta la respuesta.
b) Calcula cuánto tiempo transcurrirá para que el automóvil tenga un valor en registros contables equivalente al 25% de su valor de compra. Fundamenta tu respuesta.
c) Realiza una gráfica que muestre el valor que tiene en registros contables el automóvil a medida que transcurre el tiempo.
d) Considera que la devaluación se produce sobre el valor que tiene el automóvil el año anterior. ¿Cuál sería el valor en registros contables para el año 2020, prescindiendo de la inflación y otros índices de ajuste?

Problema 7: Una función de oferta indica el número de unidades de un producto que los proveedores quieren llevar al mercado como una función del precio que los consumidores están dispuestos a pagar. Para un cierto producto se sabe que se tiene la siguiente relación:

Cantidad (kilogramos)	Precio por kilogramo (pesos)
10	12
13	13,38
15	14,50
17	15,78
23	20,58

a) ¿Qué precio se debería fijar para una cantidad de 30 kilos? Fundamenta tu respuesta.
b) ¿Qué cantidad se debería entregar si el precio de mercado es de $50 por kg? Fundamenta tu respuesta.

Problema 8: La siguiente tabla refleja las utilidades anuales de una empresa (en pesos) en función de las cantidades producidas y vendidas de un cierto producto (en unidades).

Cantidad (unidades)	Utilidades (pesos)
10	110.000
50	630.000
60	735.000
100	1.055.000
250	830.000

a) ¿Cuál es la utilidad esperada si se venden 120 unidades? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuántas unidades deberían ser vendidas para lograr tener utilidades máximas? Justifica tu respuesta.

Problema 9: En el año 2015 un matrimonio está pagando cuotas (en pesos) de la hipoteca a 30 años de una casa. En los últimos 8 meses los pagos fueron los que se registraron en la tabla. Analiza y fundamenta si es posible anticipar los montos a pagar en los próximos 4 meses.

n	*Cuota*
1	$ 1.020,04
2	$ 1.027,57
3	$ 1.035,11
4	$ 1.042,64
5	$ 1.050,17
6	$ 1.057,69
7	$ 1.065,21
8	$ 1.072,73

Problema 10: Una aerolínea importante compra un tipo particular de avión en U$S 80 millones. La compañía estima que el precio de reventa se pondera adecuadamente por medio de la siguiente tabla:

Tiempo de vuelo del avión (horas)	Valor de reventa (millones de dólares)
0	75
10000	66
80000	27

a) ¿Cuál es el valor esperado después de 100000 horas de tiempo de vuelo del avión? Fundamenta la respuesta.
b) ¿Cuántas horas debe volar el avión para que el valor de recuperación sea igual a cero?, ¿tiene sentido hacerse esta pregunta?, ¿es lógico pensar que tendrá un valor cero? Explica las respuestas.
c) ¿Qué interpretación daría a la intersección de la función con el eje de las ordenadas? ¿Por qué no es igual a 80 millones? Explica la respuesta.

Problema 11: Se compraron maquinarias para una fábrica por un monto total de U$S 30.000. Se estima que estas maquinarias tendrán una depreciación del 2% de su valor original cada año.

a) Determine una función que exprese el valor de la máquina en función del tiempo, prescindiendo de la inflación y otros índices de ajuste.
b) Interprete el significado que tienen las constantes y variables que intervienen en el modelo funcional propuesto.
c) ¿Cuál es el dominio e imagen de la función?
d) Realiza una gráfica de esta función, colocando adecuadamente nombres a los ejes y título.

Problema 12: Suponga que un fabricante de quesos colocará en el mercado 50 mil unidades de queso sardo, cuando el precio es de U$S 35, y 35 mil unidades cuando cuestan U$S 30 cada uno.

a) Determinar la ecuación de oferta, suponiendo que el precio y la cantidad están relacionados linealmente. Realiza una gráfica adecuada de esta función.
b) Interpreta el significado de la pendiente y ordena el origen dentro del contexto del problema.
c) Anticipa la cantidad ofertada si el precio se establece en U$S 32.

Problema 13: Una compañía de TV por cable tiene 20.000 abonados y cobra U$S 25 mensuales por el servicio, y ordenó un estudio de mercado para decidir un posible aumento en sus tarifas. Los estudios muestran que por cada dólar de aumento que sufra la tarifa se pierden 339 abonados.

a) ¿Es posible aumentar la tarifa y tener ingresos superiores a los U$S 570000? Fundamenta la respuesta. Si fuese posible, establece la cantidad de abonados que podría tener la compañía.
b) ¿Existe algún valor de tarifa que hace que sean máximos los ingresos? Fundamenta la respuesta.

Problema 14: Supongamos que los clientes demandarán 40 mil unidades de un producto cuando el precio es de U$S 12 por unidad, 30 mil unidades cuando el precio sea de U$S 18 por unidad y 25 mil unidades cuando el precio es de U$S 23 por cada una de ellas.

a) Encuentra una ecuación de demanda y fundamenta la respuesta.
b) ¿Qué precio se tiene para una demanda de 60 mil unidades del producto? Interpreta la información que arroja este cálculo.
c) ¿Qué cantidad se espera sea demandada si el precio es de U$S 13 por unidad? Interpreta la información que arroja este cálculo.

Problema 15: El Ingreso por ventas de una empresa, en función de la cantidad de productos producidos y vendidos, se relaciona de la siguiente manera:

Cantidad (kg.)	*Ingresos ($)*
10	9800
32	29952
42	38472
50	45000
100	80000

a) ¿Cuántos productos se deben vender para hacer máximo el ingreso? Fundamenta la respuesta.
b) ¿A cuánto asciende el ingreso máximo? Fundamenta la respuesta.
c) ¿Qué cantidad de productos hacen nulo el ingreso? Explique si tiene sentido realizar esta determinación.
d) ¿Qué cantidad de productos es necesaria para obtener un ingreso de $80.000? Fundamenta la respuesta.
e) Realiza una gráfica de la función, indicando apropiadamente el nombre de los ejes coordenados.

Problema 16: Estudios recientes indican que la temperatura global promedio de la superficie de la tierra ha ido aumentando constantemente. Un registro de temperatura se contempla en la siguiente tabla:

Tiempo (año calendario)	Temperatura (°C)
2018	0.79
2019	1.04
2020	0.90
2021	1.12
2022	1.42

(a) Realiza un informe que muestre una descripción y análisis de estos datos. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote de herramientas y constructos de la Matemática.

(b) ¿Es posible que pueda aumentar la temperatura global promedio en los próximos años hasta alcanzar los 2°C? Fundamenta tu respuesta.

(c) Realiza un pronóstico de la temperatura global promedio para los próximos 5 años, justificando tu respuesta y las limitaciones que tiene el mismo.

Problema 17: Una compañía nucleoeléctrica estableció la producción (como porcentaje de la capacidad total) de las plantas de energía nuclear en estos últimos cuatro años, como se observa en la tabla:

Tiempo (años)	Producción (%)
1	72.0287
2	73.9754
3	75.9221
4	77.8688

(a) Realiza un informe que muestre una descripción y análisis de estos datos. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote de herramientas y constructos de la Matemática.

(b) Realiza un pronóstico de la producción de las plantas de energía nuclear para los próximos 3 años, justificando tu respuesta y las limitaciones que tiene el mismo.

(c) ¿Es posible que pueda aumentar la producción en los próximos años hasta alcanzar un 90% de la capacidad total? Fundamenta tu respuesta..

Problema 18: Las ventas anuales de *Metro Department Store* (en millones de dólares) durante los últimos 5 años fueron:

Tiempo (años)	**Ventas** (millones de U$S)
1	5.8
2	6.2
3	7.2
4	8.4
5	9

Realiza un informe que muestre una descripción y análisis de estos datos, con pronósticos a corto y largo plazo. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote de herramientas y constructos de la Matemática, como así también, indica las limitaciones que tiene el análisis realizado.

Problema 19: Se siguen las ventas anuales (en miles de millones de dólares) de equipo de sistema de posicionamiento global (GPS) desde el año 2017.

Tiempo (años)	**Ventas** (millones de U$S)
1	9.6
2	11.5
3	13.3
4	15.2
5	17
6	18.8

Realiza un informe que muestre una descripción y análisis de estos datos, con pronósticos a corto y largo plazo. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote de herramientas y constructos de la Matemática, como así también, indica las limitaciones que tiene el análisis realizado.

Problema 20: La siguiente tabla muestra la tasa de úlcera péptica a lo largo de toda la vida (por cada 100 habitantes) en relación con el ingreso de varias familias según lo informado por la encuesta nacional de salud por medio de entrevistas, realizada en Estados Unidos.

Ingresos (U$S)	**Tasa de úlcera cada 100 habitantes** (%)
4000	14.1
6000	13.0
8000	13.4
12000	12.5
16000	12.0
20000	11.4
30000	10.5
45000	9.4
60000	8.2

Realiza un informe que muestre una descripción y análisis de estos datos. Asimismo, realiza estimaciones de la probabilidad de que una familia tenga úlcera con ingresos que interpolen y extrapolen los datos suministrados. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote de herramientas y constructos de la Matemática, como así también, indica las limitaciones que tiene el análisis realizado.

Problema 21: Un investigador está tratando de determinar el tiempo de duplicación de una población de la bacteria *Giardia lamblia*. Inicia un cultivo en una solución nutritiva y efectúa el recuento de bacterias cada cuatro horas, de acuerdo a los datos suministrados en la siguiente tabla.

Tiempo (horas)	**Recuento de bacterias** (Unidad Formadora de Colonias/ml)
0	37
4	47
8	63
12	78
16	105
20	130
24	173

Realiza un informe que muestre una descripción y análisis de estos datos. Asimismo, realiza estimaciones del recuento de bacterias para tiempos que interpolen y extrapolen los datos suministrados. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote de herramientas y constructos de la Matemática, como así también, indica las limitaciones que tiene el análisis realizado.

Problema 22: El número total de estudiantes en escuelas primarias, escuelas secundarias y universidades (en millones) desde 2000 hasta 2020, para cierto país, se da en la siguiente tabla:

Tiempo (año calendario)	**Cantidad de estudiantes** (millones)
2000	64,8
2005	68,7
2010	72,6
2015	74,8
2020	78

Realiza un informe que muestre una descripción y análisis de estos datos. Asimismo, realiza estimaciones del número total de estudiantes para los siguientes 10 años. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote de herramientas y constructos de la Matemática, como así también, indica las limitaciones que tiene el análisis realizado.

Problema 23: Algunos antropólogos sostienen que existe una relación entre la longitud del fémur humano con la altura del individuo. El modelo matemático permite a un antropólogo determinar la altura de un individuo cuando se encuentra el esqueleto en forma parcial (el fémur).

Busca datos referidos a la longitud del fémur y altura de una persona, analízalos y fundamenta tus decisiones desde un punto de vista matemático. Asimismo, determina y fundamenta si la longitud de tu fémur y altura guardan relación con este modelo.

Problema 24: Según Economipedia, la tasa de mortalidad es la proporción de defunciones registradas, con respecto a la cantidad de individuos total que habita en una población, ciudad o país; en un año. Es un indicador demográfico, ya que gracias a su cálculo es posible razonar sobre lo que provoca las defunciones, como el estado de salud de las personas, los fenómenos sociales violentos e incluso de temas de riesgo ambiental; ya que las personas mueren por causas naturales, accidentes, homicidios, fenómenos climáticos, etc.

Por lo que gracias a la tasa de mortalidad es posible relacionar si en una región existen mayores defunciones según su edad, sexo, alimentación, ascendencia genética, riesgo de trabajo, entre otros.

Es así que, su análisis arroja información valiosa con respecto a la manera en que viven las personas, sus antecedentes familiares, su contexto político, económico y social que conduce a una muerte temprana o a la longevidad.

Esta información no es solo útil para las esferas gubernamentales que deben planificar y gestionar actividades encaminadas a prevenir y promover la salud en la población; sino para el mundo empresarial que debe conocer qué productos o servicios ofrecerle a la sociedad, que aumente su esperanza de vida.

Escoge una problemática y país de tu interés, buscando datos relevantes de la tasa de mortalidad de los últimos 7 años, para efectuar un informe que muestre el análisis y descripción de los mismos. Asimismo, realiza pronósticos para los siguientes 5 años. Fundamenta las apreciaciones vertidas en el informe apoyándote en herramientas y constructos de la Matemática, como así también, indica las limitaciones que tiene el análisis realizado.

UNIDAD N° 2

ECUACIONES E INECUACIONES

2.1. Los problemas contextualizados en matemática

Entendemos que un **problema en matemática** es una situación que involucra la producción de conocimientos significativos para el que aprende, con una serie de ciclos de modelización en los que aparecen, se comprueban y se afinan representaciones y modos de pensamiento cada vez más complejos. La **resolución de problemas**, en tanto, la concebimos como un proceso que propicia el acercamiento de una persona al conocimiento, partiendo del suyo propio, organizándolo alrededor de relaciones posibles de establecer entre los diferentes conceptos, nociones, objetos y estructuras de la matemática. Pensamos que, además de aprender a resolver problemas, tenemos que desarrollar la habilidad para reconocer los problemas que vale la pena resolver, pues en el mundo cotidiano resulta más difícil identificar "el problema" que resolverlo.

En el mundo cotidiano, la **resolución de problemas** no muestra de forma precisa la información necesaria que se requiere para abordarlos, ni tampoco está claro el sitio en el cual deba buscarse la misma. La vida real es compleja y hallar la información puede ser a menudo un problema en sí mismo.

Más allá del posicionamiento anterior, por las limitaciones de tiempo que tenemos en este curso, no abordaremos en profundidad la resolución de problemas con ese sentido (problemas abiertos donde no es clara la información ni el lugar del cual obtenerla). Muy por el contrario, cuando hablamos de resolver problemas de matemática, aludimos a situaciones que se encuentran más o menos bien definidas y estructuradas. Habitualmente serán situaciones que refieren a contenidos matemáticos previamente abordados, donde toda la información necesaria para la solución viene dada en el enunciado, y cuya finalidad es lograr afianzar el dominio de una técnica o aplicación de un concepto anteriormente aprendido.

Ahora bien, a pesar de que abordaremos algunos problemas que podemos categorizar como "prototípicos", también pretendemos convertirlos en los protagonistas principales de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en tanto les reconocemos conocimientos y potencialidades que permiten interactuar con un cúmulo de saberes propios previamente construidos y potenciar algunas habilidades que son extrapolables a otros contextos y disciplinas. Con las situaciones que abordaremos en esta unidad nos proponemos que se familiaricen con el lenguaje matemático, las ecuaciones y las funciones (que ya trabajamos en la unidad anterior), logren traducir un mensaje coloquial a una expresión matemática donde se pongan de manifiesto las premisas establecidas y los resultados a obtener, desarrollen estrategias de resolución, realicen intercambios de interpretaciones de enunciados y procedimientos empleados, y revisemos contenidos matemáticos y lógicos elementales.

Partir de situaciones problemáticas de la realidad concreta, o cercanas con la vida cotidiana y la cultura propia, e ir más allá, analizando, comparando y creando modelos propios de la actividad de construcción conceptual en matemática, nos lleva a trabajar con el **lenguaje matemático**, el cual puede conducir a poner en evidencia algunas dificultades, tales como:

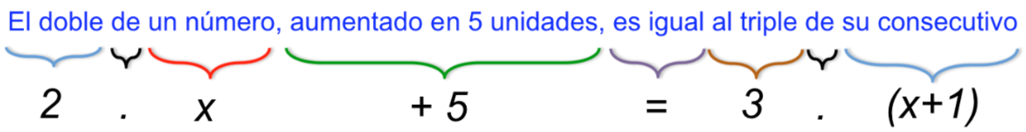
- Falta de entendimiento del lenguaje cotidiano en que se expresa el texto del problema, puesto que suelen aparecer palabras que en matemática y en el lenguaje ordinario tienen distintos significados. La palabra “diferencia”, por citar un ejemplo, en matemática alude generalmente a la operación de resta, mientras que en el lenguaje común es el antónimo de igualdad.
- Falta de conocimientos matemáticos involucrados en el problema (la resolución de ecuaciones de algún tipo en específico, por ejemplo).
- Falta de conocimientos relativos a conceptos utilizados en otras ciencias o disciplinas involucradas en el problema (costo fijo, utilidad, velocidad, densidad, etc.)

La actividad de traducción es importante y reconocemos que ofrece muchas dificultades, pues aprender a comunicar en un lenguaje matemático no se presenta como tarea fácil, en tanto nos enfrentamos a un lenguaje formal y dominado por un gran número de normas que le confieren gran rigidez. De todos modos, intentaremos abordar estas dificultades a medida que se vayan presentando los diferentes problemas. En primera instancia, revisaremos algunas traducciones que emplean una jerga especial, implican palabras y expresiones típicas de la matemática, y conducen a una determinada forma de proceder.

2.2. El lenguaje en los problemas de matemática

Traduciremos algunas frases, dadas en lenguaje coloquial al lenguaje matemático, pues aparecen habitualmente en la resolución de un problema de matemática. Consideremos la frase: *El doble de un número aumentado en 5 unidades, es igual al triple de su consecutivo*.

Solución: Si *x* denota el número buscado, una traducción del enunciado de la situación nos conduce a una ecuación que permitiría hallar su valor:



En consecuencia, la ecuación: $2x + 5 = 3(x + 1)$ constituye un modelo algebraico del enunciado verbal anterior.

Muchas de las expresiones que debemos traducir del lenguaje coloquial al lenguaje matemático involucran una **igualdad** entre dos miembros, y por ende resulta sumamente importante determinar qué palabra denota un signo “igual”. Así, por ejemplo, palabras como: “es”, “tiene”, “se obtiene”, “resulta”, “vendió”, “logró”, entre otras, suelen aludir a un “igual”. Asimismo, la palabra “de” dentro de una frase habitualmente involucra una multiplicación.

Veamos con otro ejemplo un error que se comete al traducir una expres
involucra una igualdad.

Error de traducción: "La edad de María es el doble de la edad de Juan"

$$\underbrace{\text{La edad de María es el doble de}}_{2\,.\,x}\ \underbrace{\text{la edad de Juan}}_{=\qquad y}$$

Traducción correcta: "La edad de María es el doble de la edad de Juan"

$$\underbrace{\text{La edad de María}}_{x}\ \underbrace{\text{es}}_{=}\ \underbrace{\text{el doble}}_{2}\ \underbrace{\text{de}}_{.}\ \underbrace{\text{la edad de Juan}}_{y}$$

Sigamos con traducciones y errores frecuentes que se cometen. Si con "x" denotamos el importe por ventas de la compañía A, y con "y" el importe por ventas de la compañía B ¿Cuál sería la expresión que simboliza en lenguaje matemático la frase: "La compañía A vendió un 25% más que la compañía B"?

Un error frecuente de traducción es el siguiente:

$$\underbrace{\text{La compañía A}}_{x}\ \underbrace{\text{vendió}}_{=}\ \underbrace{\text{un 25\%}}_{0{,}25}\ \underbrace{\text{más}}_{+}\ \underbrace{\text{que la compañía B}}_{y}$$

¿Por qué hay un error de traducción? Si analizamos las unidades de medida, veremos que "x", al igual que "y" debieran estar expresadas en alguna unidad monetaria, como ser: pesos, euros, dólares, etc. En el segundo miembro de la igualdad se tiene una suma, en consecuencia, cada sumando estaría en la misma unidad. Así, resultaría que 0,25 son unidades monetarias que le agregamos al importe de ventas de la compañía B, lo cual **no** es cierto.

Además, cuando hablamos de porcentajes, siempre están referidos a "algo". Nadie puede decir solamente: "Gané un 25%", "Perdí un 25%", pues nos hace falta un referencial: ¿25% de qué? En nuestro ejemplo, es un 25% de las ventas de la compañía B. Entonces la traducción quedaría:

$$\underbrace{\text{La compañía A}}_{x}\ \underbrace{\text{vendió}}_{=}\ \underbrace{\text{un 25\%}}_{0{,}25\,y}\ \underbrace{\text{más}}_{+}\ \underbrace{\text{que la compañía B}}_{y}$$

Todo esto que comentamos tiene que ver, a su vez, con el modo en que hacemos una lectura en matemática y la que habitualmente realizamos cuando leemos en español. Analicemos el modo en que leemos expresiones matemáticas sobre algunas estructuras elementales:

Expresión matemática (a y b denotan números reales)	Lectura frecuente	Lectura matemática apropiada
$a + b$	a más b	La suma de dos números reales Cualesquiera
$(a + b)^2$	a más b al cuadrado	El cuadrado de la suma de dos números reales cualesquiera
$\frac{a+b}{2}$	a más b dividido 2	El promedio entre dos números reales cualesquiera, o también, la semisuma de dos números reales cualesquiera
$a^2 - b^2$	a al cuadrado menos b al cuadrado	La diferencia entre los cuadrados de dos números reales cualesquiera
$1 < a < 5$	1 menor que a, menor que 5	Un número real cualquiera comprendido entre 1 y 5

Debemos notar la ambigüedad que presentaría una lectura de

$(a + b)^2$ como "a más b al cuadrado",

pues si nos presentaran esta frase y nos piden que la expresemos en lenguaje algebraico escribiríamos: $a + b^2$.

¿Se advierte la diferencia en estas dos traducciones?

Del mismo modo, la frase:

"a más b dividido 2" quedaría representada por: $a + \frac{b}{2}$,

y no tendríamos correspondencia entre ida y vuelta de la traducción.

Pasemos ahora a una estructura matemática donde será necesario tener en cuenta todo lo referido a lenguaje y traducciones. Aludimos a las ecuaciones y el proceso que demanda su resolución.

2.3. Las ecuaciones y su resolución

En las secciones anteriores estuvimos trabajando con ecuaciones, pero **¿qué es una ecuación?** De manera muy elemental diríamos que una ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas sus lados o miembros y **están separadas por el signo de igualdad "="**. Seguramente recordarán las ecuaciones porque las trabajaron a lo largo de la escuela secundaria. Recordarán que incluían al menos una variable que podía ser reemplazada por un número cualquiera de un conjunto de números diferentes. Entre ese conjunto de números teníamos valores permisibles o permitidos y si la ecuación provenía de un fenómeno, podíamos restringirlos por razones físicas.

Por ejemplo, si la variable q representa la cantidad de un cierto producto, valores negativos de q pueden no tener sentido. Entonces debemos suponer que $q \geq 0$.

Resolver una ecuación significa encontrar todos los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores son llamados soluciones de la ecuación y decimos que satisfacen la ecuación. Cuando solo está implicada una variable una solución también es llamada raíz. El conjunto de todas las soluciones es llamado conjunto solución de la ecuación. En ocasiones a una letra que representa una cantidad desconocida en una ecuación se le denomina incógnita (o indeterminada).

Te invitamos a ver un video donde se aborda los conceptos que mencionamos.

Descripción	Dirección URL
¿Qué es una ecuación y cómo se soluciona?	https://youtu.be/lDk2UVS4iuw

2.3.1. Ecuaciones equivalentes

Resolver una ecuación puede implicar la realización de operaciones en ella. Es preferible que al aplicar cualquiera de tales operaciones se obtiene otra ecuación con exactamente las mismas soluciones que la ecuación dada. Cuando esto ocurre, se dice que las **ecuaciones son equivalentes**. Existen tres operaciones que garantizan la equivalencia:

- Sumar (o restar) el mismo polinomio a ambos miembros de una ecuación, en donde el polinomio está en la misma variable que aparece en la ecuación. Habitualmente esta propiedad suele estar asociada a reglas de transposición, por ejemplo: "*el que está sumando pasa restando*", o "*el que está restando pasa sumando*".
- Multiplicar (dividir) ambos miembros de una ecuación por la misma constante, excepto el 0. Esta propiedad está asociada a la transposición de términos en una ecuación y suele ser expresada de la siguiente manera: "*el que está multiplicando pasa dividiendo*" o viceversa.
- Reemplazar cualquiera de los miembros de una ecuación por una expresión igual (equivalente). Por ejemplo, si: $x.(x+2)=3$, al reemplazar el miembro izquierdo por la expresión equivalente x^2+2x da la ecuación equivalente $x^2+2x=3$.

Es importante tener presente las propiedades pues las reglas fácilmente las olvidamos. A veces nos encontramos con reglas "inventadas" de transposición de términos cuando resuelven ecuaciones. Así, por ejemplo, si aparece un factor o dividendo negativo (pensemos en la ecuación $-3x = 15$) suelen argumentar: "*El –3 está multiplicando, entonces hay que pasarlo dividiendo y cambiado de signo*", cuando no se hubiese presentado esa "extraña" regla si manejasen propiedades elementales.

La aplicación de estas operaciones garantiza que la ecuación resultante sea equivalente a la dada, sin embargo, algunas veces tenemos que aplicar otras operaciones que no necesariamente resultan en ecuaciones equivalentes. Esto lo tratamos en la siguiente sección.

2.3.2. Operaciones que pueden producir ecuaciones no equivalentes

- Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable. Por ejemplo, por inspección la única raíz de $x-1=0$ es 1. Si multiplicamos cada miembro por x nos da: $x^2-x=0$, ecuación que se satisface si x es 0 ó 1. Pero 0 no satisface la ecuación original. Por lo tanto, las ecuaciones no son equivalentes.

- Dividir ambos miembros de una ecuación por una expresión que involucre la variable. Por ejemplo, la ecuación: $(x - 4).(x - 3) = 0$ se satisface para dos valores de la variable: el 4 y el 3. Si embargo, si "pasamos" dividiendo uno de los factores, lo cual equivale a dividir ambos miembros de la ecuación por uno de ellos (consideremos el factor $x - 4$) quedaría: $x - 3 = 0$, cuya única raíz es 3. Otra vez no tendríamos una equivalencia, puesto que se habría "perdido" una solución. Tenemos que cuando x es 4, al dividir ambos miembros por $x - 4$ implica dividir por 0, lo cual es una operación no válida.
- Elevar ambos miembros de una ecuación al mismo exponente. Por último, elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación: $x = 2$ da por resultado: $x^2 = 4$, la cual es verdadera si x es 2 ó –2. Pero –2 no es una raíz de la ecuación dada.

De lo anterior queda claro que cuando realicemos las tres operaciones mencionadas debemos ser cuidadosos acerca de las conclusiones concernientes a las raíces de una ecuación dada. Por tanto, **se debe verificar** si cada "solución" obtenida por estas operaciones satisface o no la ecuación original.

En resumen, una ecuación puede pensarse como un conjunto de restricciones sobre cualquier variable en la ecuación. Las tres últimas operaciones pueden aumentar o disminuir las restricciones, dando lugar a soluciones diferentes de la ecuación original. Sin embargo, las primeras operaciones (las que garantizan ecuaciones equivalentes) nunca afectan a dichas restricciones.

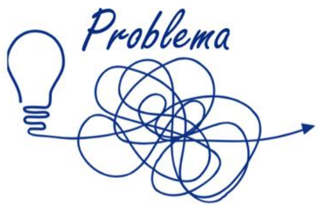
2.3.3. La resolución de ecuaciones con software

Planeamos, inicialmente, que nos interesa que aprendas a resolver problemas más que la resolución mecánica de algoritmos. Esto significa que le daremos prioridad al planteo de modelos matemáticos que describen un fenómeno y para encontrar las posibles soluciones usaremos software. No obstante, esto no invalida que mostremos cómo realizar una resolución "tradicional" de alguna ecuación, y más cuando las mismas son sencillas de resolver.

Para poner un problema en ecuaciones hay que traducir el enunciado del problema, que está escrito en lenguaje natural, al lenguaje algebraico. Esto es equivalente a cuando tenemos que traducir un texto de un idioma extranjero al castellano, pues no siempre es conveniente hacerlo palabra por palabra.

Habitualmente necesitamos comprender el significado global de cada frase del texto para luego buscar expresiones castellanas que las traduzcan. Lo mismo sucede al traducir una frase de un problema al lenguaje algebraico. Pero para traducir al lenguaje algebraico tenemos que tener en cuenta que, además, en ese lenguaje sólo se puede hablar de cantidades, operaciones con cantidades y relaciones entre ellas.

Veamos un ejemplo de problema que requiere traducciones del lenguaje natural al simbólico o matemático.



Una compañía de bienes raíces compra una parcela de campo a U$S 480000. Posteriormente, vende una fracción de ella y se queda con 20 hectáreas, recuperando el dinero invertido. Si obtiene en la venta una ganancia de U$S 2000 por hectárea, con respecto al costo original abonado por la misma. ¿Cuántas hectáreas fueron vendidas?

La resolución la haremos marcando algunas etapas que consideramos necesarias se tengan en cuenta, pues ayudan a plantear una ecuación que modelo un problema. Veamos un detalle de las mismas:

En primera instancia debemos comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas. Para ello, es bueno hacer algún esquema o dibujo que nos ayude con la interpretación.

Luego, damos nombre a una de las cantidades desconocidas, asignándole una letra, lo cual es importante para posteriormente analizar la coherencia de la ecuación construida.

x: *Cantidad de hectáreas vendidas*

Representamos las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que hemos designado con una letra.

Cantidad de hectáreas compradas: $x + 20$

Si tenemos en cuenta que el precio por hectárea se obtiene del cociente entre el monto pagado y la cantidad de hectáreas vendidas o compradas, resulta:

Precio de compra por hectárea: $\frac{480000}{x+20}$

Precio de venta por hectárea: $\frac{480000}{x}$

Escribimos una igualdad entre las expresiones algebraicas (ecuación) a partir de las relaciones existentes entre las diferentes cantidades.

Ganancia por hectárea = Precio de venta por hectárea – Precio de compra por hectárea

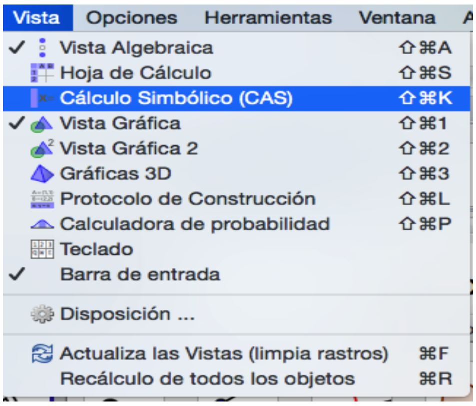
$$2000 = \frac{480000}{x} - \frac{480000}{x+20}$$

Comprobamos que los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad, para lo cual será importante tener en cuenta las unidades de medida. Si los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad, hay grandes posibilidades de haber hecho una traducción adecuada del lenguaje natural al lenguaje algebraico, es decir, habremos puesto el problema en ecuaciones.

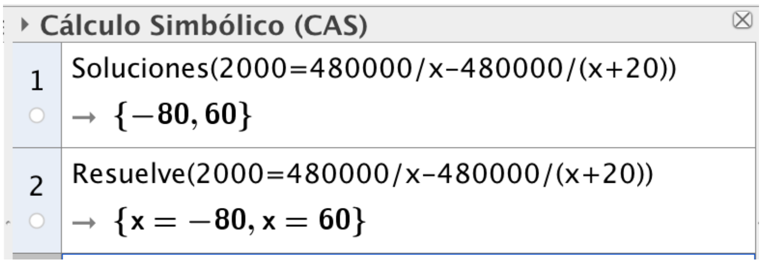
$$2000 = \frac{480000}{x} - \frac{480000}{x+20}$$

$$\left[\frac{U\$S}{ha}\right] = \left[\frac{U\$S}{ha}\right] - \left[\frac{U\$S}{ha}\right]$$

Una vez puesto el problema en ecuaciones, procedemos a la resolución de la ecuación, y lo haremos con software. En primer lugar, lo haremos con GeoGebra. Para ello, activaremos la ventana de **Cálculo Simbólico** (CAS) que se encuentra en **vista** de la barra de tareas.



En la ventana de **Cálculo Simbólico**, usaremos la función Soluciones(<Ecuación>) o Resuelve (<Ecuación en x>) y pulsaremos entrada. Tenemos que ser cuidadosos en el modo en que escribimos la ecuación, respetando la jerarquía de paréntesis. En nuestro caso, arrojaría la siguiente solución:



Esto nos indica que la ecuación, desde un punto de vista matemático, tiene por solución $x_1 = -80$ y $x_2 = 60$. Descartamos el primer valor, pues sería absurdo considerar una cantidad negativa de hectáreas compradas. Hasta tanto no verifiquemos la solución, una respuesta tentativa sería que se vendieron 60 hectáreas.

Comprobamos ahora que el resultado obtenido satisface la condición del problema, para ello hacemos una mirada retrospectiva:

Si se vendieron 60 hectáreas, quiere decir que la parcela tenía originalmente 80 hectáreas, pues la compañía de bienes raíces se quedó con 20 hectáreas. Puesto que abonaron $U\$S\ 480000$ por la parcela completa, significa que cada hectárea fue pagada a razón de:

$$\frac{U\$S\ 480000}{80\ ha} = 6000\,\frac{U\$S}{ha}$$

Ahora bien, al vender 60 hectáreas también a U$S 480000, el precio de venta por hectárea resultó de:

$$\frac{U\$S\ 480000}{60\ ha} = 8000\,\frac{U\$S}{ha}$$

Esto es, se han ganado U$S 2000 por hectárea vendida con respecto al precio de compra. En síntesis, es correcto afirmar que se vendieron 60 hectáreas.

Te invitamos a ver un video donde se explica la resolución de este problema:

Descripción	Dirección URL
Problema de ecuaciones	https://vimeo.com/ucasal/review/394917132/ff2fe8259e

2.4. Problemas de proporcionalidad y ecuaciones

En la vida corriente utilizamos el término proporción con distintos sentidos. Así, por ejemplo, cuando decimos que un edificio o construcción está bien proporcionado, le estamos dando a este término un sentido de armonía y estética. Si comentamos que el éxito de una persona es proporcional (o está en proporción) a su trabajo, ponemos de manifiesto la correlación entre dos variables: éxito y trabajo. También solemos utilizarlo para comparar fenómenos en distintos ámbitos: *“Proporcionalmente una hormiga es más fuerte que un elefante”*; *“Un escarabajo puede levantar 850 veces el peso de su propio cuerpo. Proporcionalmente equivaldría a que un hombre levantara sobre su cabeza un tanque de 50 toneladas”* o *“Una pulga puede saltar hasta 130 veces su altura. Para competir con ella un hombre debería saltar limpiamente un edificio de 100 metros de alto”*.

No obstante, en matemática esta palabra tiene un significado más restringido que trataremos de precisar. Antes de avanzar, te invitamos a ver un video donde se aborda el concepto de razón, el cual es necesario para comprender las ideas que estamos comentando.

Descripción	Dirección URL
¿Qué es una razón?	https://youtu.be/pGWF7tbHx9k

Si tenemos claro lo que es una razón, pasemos al concepto de proporción, el cual se relata en el siguiente video:

Descripción	Dirección URL
¿Qué es una proporción?	https://youtu.be/0jUM-p1QyOE

Sigamos precisando estas nociones con más ejemplos. Consideremos frases habituales en el análisis de relaciones entre magnitudes: "Al doble de m^2 de pared corresponde doble cantidad de litros de pintura", "A triple de tiempo de llamada telefónica corresponde triple importe", etc. Cuando podemos utilizar este tipo de expresiones: *"a doble….doble", "a mitad…mitad", "a triple…triple", "a un tercio…un tercio"*, etc., decimos que las dos magnitudes son directamente proporcionales. Así, por ejemplo, decimos que *"La superficie de pared a pintar es directamente proporcional al volumen de litros de pintura"*. *"El costo de una llamada telefónica es directamente proporcional al tiempo que dura la comunicación"*. Esto nos lleva a profundizar en las propiedades y procedimientos que necesitamos para resolver los problemas de proporcionalidad.

2.4.1. Regla de tres directa

Desde la escuela primaria venimos trabajando con proporcionalidad. Sin embargo, las situaciones de proporcionalidad han dado lugar al aprendizaje de "recetas" conocidas con el nombre de reglas de tres. Por ejemplo, nos resultaría conocido resolver un problema cuyo enunciado es el siguiente: *Si 5 kg de papas cuestan 15 pesos ¿Cuánto cuestan 7 kg?*

Habitualmente llevamos a cabo el siguiente procedimiento, que involucra determinar las magnitudes que están en juego:

Cantidad de papas	Precio
5 kg	\$ 15
7 kg	\$ x

Luego, casi de manera mecánica, planteamos la siguiente ecuación:

$$x = \frac{7 \cdot 15}{5} = 21$$

Por lo tanto, damos por respuesta que el precio sería de \$ 21 para 7 kg de papas. ¿**Por qué efectuamos así esta regla**? Lo hacemos de esta manera porque son magnitudes directamente proporcionales y, por lo tanto, los cocientes, razones o proporciones son iguales. Esto nos dice que:

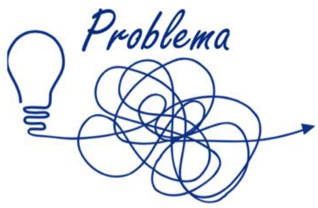
$$\frac{7}{5} = \frac{x}{15} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 15}{5}$$

Te invitamos a ver un video donde se resuelve un problema de proporciones. Presta atención al modo en que se estructura la ecuación más que su procedimiento mecánico, pues la idea no es aprender rutinas sino adquirir un modo de pensar matemático.

Descripción	Dirección URL
Problema de razones y proporciones	https://youtu.be/jboHWe4_6D8

2.4.2. Proporcionalidad inversa

Así como presentamos las situaciones de proporcionalidad directa, haremos lo mismo ahora con las de proporcionalidad inversa.



Supongamos que se quieren transportar 1200 toneladas de soja hasta Buenos Aires y sabemos que en un determinado tipo de camión caben 8 toneladas ¿Cuántos viajes tendrán que hacerse con 3 camiones de ese tipo para transportar toda la soja? ¿y con 30 camiones? Fundamenta tus respuestas.

Observemos que, a doble número de camiones, debemos hacer la mitad de viajes. A triple número de camiones, la tercera parte de viajes. Ahora bien, cabe preguntarnos ¿cómo nos damos cuenta que es una proporcionalidad directa o inversa? Te invitamos a ver un video donde se da la respuesta a esta pregunta.

Descripción	Dirección URL
¿Cómo identificar si es directa o inversa?	https://youtu.be/OyEcoAV3oFY

Entonces, retomando el problema planteado, tenemos las siguientes magnitudes involucradas:

Cantidad de camiones	Cantidad de viajes
1	150
3	x

Podemos advertir que si aumentamos el número de camiones tendremos que disminuir la cantidad de viajes. En consecuencia, estaríamos ante una proporcionalidad inversa. Si planteamos las proporciones adecuadamente tendremos:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{150} \rightarrow x = \frac{1 \cdot 150}{3} = 50$$

¿Por qué efectuamos así esta regla? Si completamos una tabla tendremos:

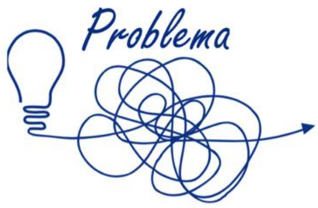
N.º de camiones	1	2	3	5	6
N.º de viajes	150	75	50	30	25

Si realizamos los productos entre las cantidades de las magnitudes, obtenemos una constante:

$$1 \cdot 150 = 2 \cdot 75 = 3 \cdot 50 = 5 \cdot 30 = 6 = 25 = 150$$

En consecuencia, para determinar la cantidad de viajes que haremos con 30 camiones hacemos:

$$1 \cdot 150 = 30 \cdot x \to x = \frac{1 \cdot 150}{3} = 50$$



Con las provisiones de forraje, un agricultor puede alimentar durante el invierno un rebaño de 36 cabezas durante tres meses. ¿Cuántos animales debe vender para poder alimentar a su rebaño durante 4 meses? Fundamenta tu respuesta.

Las dos variables que intervienen son tiempo y cantidad de animales. Los datos del problema resultan:

Tiempo	Cantidad de animales
3 meses	36
4 meses	x

Podemos advertir que, si aumentamos el tiempo en meses, tendremos posibilidades de alimentar a menor cantidad de animales. Por consiguiente, resolveremos el problema considerando que se trata de una relación de proporcionalidad inversa, en el sentido que, a mayor número de cabezas para alimentar, menor será el tiempo que se dispone de forraje. Planteando las proporciones:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{36} \to x = \frac{3 \cdot 36}{4} = 27$$

Esto nos dice que se tiene alimento para 27 animales. No obstante, la pregunta es: *¿Cuántos animales debe vender para poder alimentar a su rebaño durante 4 meses?,* lo cual nos lleva a la respuesta de 9 animales.

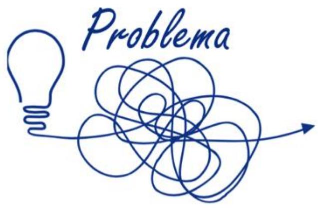
2.4.3. Proporcionalidad compuesta

La proporcionalidad compuesta nos permite resolver problemas en los que intervienen más de dos magnitudes que mantienen entre sí relaciones de proporcionalidad.

Te invitamos a ver un video donde se analiza el tipo de proporcionalidad que se presenta en un problema, dando lugar a una proporcionalidad compuesta.

Descripción	Dirección URL
Proporcionalidad compuesta	https://youtu.be/oWDzbIp7x_M

Pasemos ahora a la resolución de un problema.



Un crucero por el Mediterráneo necesita 54.000 € para gastos de alojamiento y comida de 200 personas durante 15 días. ¿Cuánto se gastará para alojar y alimentar a 250 personas durante 10 días? Fundamenta tu respuesta.

Si organizamos los datos en una tabla tendremos:

G = Gastos	P = N.º de personas	D = N.º de días
54000 €	200 personas	15 días
x €	250 personas	10 días

Veamos qué relación de proporcionalidad, directa o inversa, mantiene la magnitud G de la incógnita con las otras dos magnitudes. Es fácil observar que si P es constante entonces: *a doble número de días, doble gasto; o que a triple número de días triple gasto*; o que, *si reducimos las vacaciones a la tercera parte, el gasto se reducirá a la tercera parte*. Resumiendo, G es directamente proporcional a D. De igual manera, si D es constante entonces G es directamente proporcional a P.

Escrito de otra forma tenemos:

Directa

54000 €	200 personas	15 días
x €	250 personas	10 días

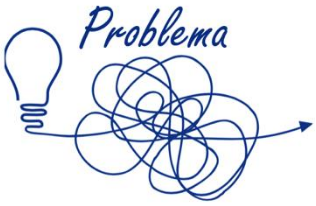
Directa

Por lo tanto, las proporciones resultantes son:

$$\frac{x}{54000} = \frac{250}{200} \cdot \frac{10}{15} \rightarrow x = \frac{250}{200} \cdot \frac{10}{15} \cdot 54000$$

$$x = 45000$$

Esto nos indica que se gastará 45000 € para alojar y alimentar a 250 personas durante 10 días.



Si 18 máquinas mueven 1200 m^3 de tierra en 12 días, ¿cuántos días necesitarán 24 máquinas para mover 1600 m^3 de tierra? Fundamenta tu respuesta.

Con un mismo número de máquinas, para mover doble o triple cantidad de tierra, se necesitarán el doble o el triple número de días, respectivamente. Por lo tanto, la relación de proporcionalidad es directa.

Para una misma cantidad de m^3 de tierra, doble o triple cantidad de máquinas tardarán la mitad o la tercera parte, respectivamente. Por tanto, esta relación de proporcionalidad es inversa. En forma gráfica lo vemos de la siguiente manera:

Directa

18 máquinas	1200 m^3 de tierra	12 días
24 máquinas	1600 m^3 de tierra	x días

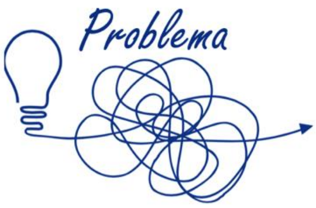
Inversa

Por lo tanto,

$$\frac{x}{12} = \frac{18}{24} \cdot \frac{1600}{1200} \rightarrow x = \frac{18}{24} \cdot \frac{1600}{1200} \cdot 12$$

$$x = 12$$

Esto nos indica que se requieren de 12 para que 24 máquinas muevan 1600 m^3 de tierra.



Para realizar una tapia con ladrillos tipo block 4 obreros de la construcción estiman que la realizan en 9 días hábiles trabajando 8 horas diarias. Se dispone de 2 obreros que trabajan al mismo ritmo, pero durante 6 horas diarias. ¿Cuánto tiempo necesitarían para construir la tapia? Fundamenta tu respuesta.

En este problema intervienen 3 magnitudes: la cantidad de obreros, la cantidad de horas diarias de trabajo y la cantidad de días que insume la obra. ¿Cuál es la relación entre las magnitudes? Si disminuimos a la mitad la cantidad de obreros se requerirá el doble de días hábiles de trabajo (relación inversa). Si se disminuye la cantidad de horas de trabajo diario, requerirá mayor cantidad de días de trabajo para finalizar la obra (relación inversa).

En forma gráfica lo vemos de la siguiente manera:

Inversa

4 obreros	8 horas diarias	9 días
2 obreros	6 horas diarias	x días

Inversa

Por lo tanto,

$$\frac{x}{9} = \frac{8}{6} \cdot \frac{4}{2} \rightarrow x = \frac{8}{6} \cdot \frac{4}{2} \cdot 9$$

$$x = 24$$

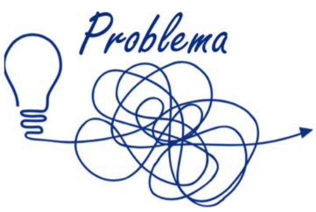
Esto nos dice que se requieren de 24 días hábiles para que 2 obreros realicen la obra trabajando 6 horas diarias.

Te invitamos a ver un video con la resolución de los tres problemas de proporcionalidad compuesta que acabamos de presentar.

Descripción	Dirección URL
3 problemas de proporcionalidad	https://vimeo.com/ucasal/review/394918699/882cf2144b

2.5. Ecuaciones, inecuaciones y sistema de ecuaciones

Para resolver muchos problemas prácticos, es necesario traducir en símbolos matemáticos las relaciones que se plantean. Se obtienen así modelos que, a su vez, pueden ser funciones o ecuaciones. Pasemos a la resolución de un problema de administración, donde pondremos en juego ecuaciones, inecuaciones y sistema de ecuaciones.



Para la producción de cierto artículo, de tipo artesanal, se estableció que si se fija un precio de $ 1000 por unidad, los consumidores demandarían 10 unidades, con un costo total para producirlas de $ 6000. Por otra parte, la experiencia muestra que, si el precio se reduce en un 25%, la demanda de los consumidores llega a 15 unidades, con un costo total de producción de $ 6500 para todas ellas.

Si suponemos un comportamiento lineal, tanto en la demanda como en los costos, ¿Qué cantidad se debería producir para obtener la máxima utilidad?

Si se dispone de hasta $7000 para la producción, ¿cuántos artículos se podrían producir?, ¿es conveniente producir esa cantidad? Fundamenta tu respuesta.

El problema suministra información, pero tenemos que articular la misma adecuadamente. Rescatemos los datos dados en el problema

Precio por unidad	*Cantidad demandada*	*Costo Total*
$ 1000	10 unidades	$ 6000
$ 750	15 unidades	$ 6500

Por un lado, es necesario que encontremos la **ecuación de demanda**. Por el otro, que determinemos las funciones de **Costo Total**, **Ingreso por Ventas** y **Utilidades**, las cuales requieren de la ecuación de demanda, pues:

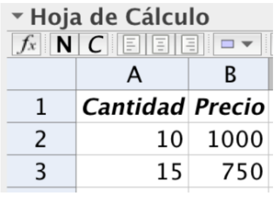
$$Ingreso\ por\ Ventas = p \cdot q$$

$$Ingreso\ por\ Ventas = (ecuación\ de\ demanda) \cdot (cantidad)$$

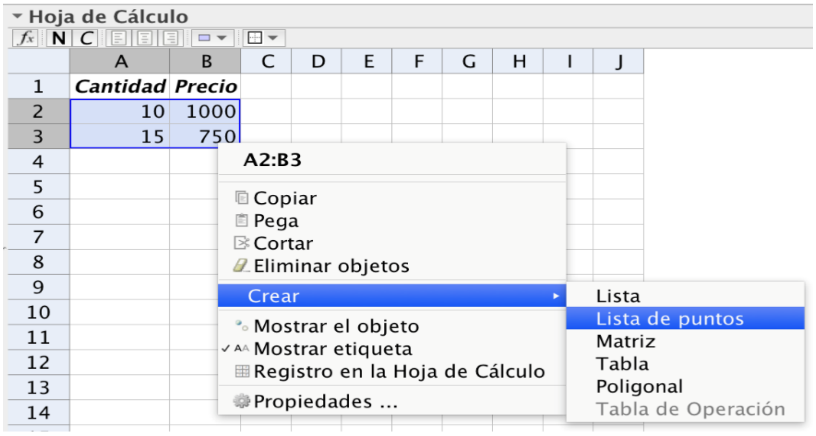
$$Utilidades = Ingreso\ por\ Ventas - Costo\ Total$$

En consecuencia, tenemos que encontrar, inicialmente, la ecuación de demanda, sabiendo que es lineal. Las posibilidades son varias y probaremos con algunas de ellas.

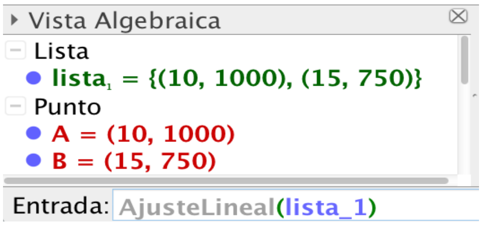
Podríamos realizar un ajuste con GeoGebra, creando previamente una lista de puntos. No debemos olvidar que la ecuación de demanda pone al precio en función de la cantidad. Por esta razón, la variable dependiente será el precio y la independiente la cantidad.



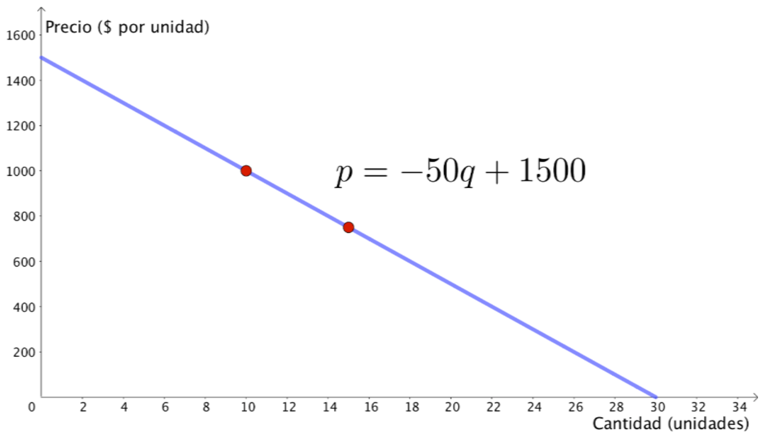
Con los datos seleccionados adecuadamente, creamos una lista de puntos:



Esto nos permitirá realizar un ajuste, el cual tendrá que ser lineal, pues es la condición dada en el problema.



La representación gráfica y ecuación de demanda resultante es la siguiente:



Otra manera de encontrar la ecuación de demanda es planteando un sistema de ecuaciones. Sabemos que el comportamiento es lineal y por esta razón la ecuación de demanda tendrá el siguiente formato:

$$p = a \cdot q + b$$

*Una **ecuación lineal** en dos variables (por ejemplo p y q) es una ecuación que puede ser escrita en la forma: $a_1 \cdot p + a_2 \cdot q + b = 0$ donde a_1, a_2 y b son constantes.* Notemos que la potencia más alta de la variable que aparece en la ecuación es la primera o uno.

Una ecuación lineal de dos variables tiene infinitas soluciones, que son los diferentes pares ordenados que conforman las dos variables, o podría no tener solución. Gráficamente, una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta. Así, las infinitas soluciones de una ecuación lineal de este tipo corresponderían a los infinitos puntos de dicha recta.

Para pensar y reflexionar: Si una ecuación lineal a dos variables puede tener infinitas soluciones o no tener ninguna, cabe preguntarse: *¿qué valores deberían tener las constantes de una ecuación lineal a dos variables para que no tenga solución?, ¿y para que tenga solución? Si una ecuación lineal a dos variables tiene infinitas soluciones, ¿siempre representa geométricamente una recta?*

Como los pares ordenados $(10{,}1000)$ y $(15{,}750)$ satisfacen la ecuación de demanda, se debe cumplir que:

$$\begin{cases} 1000 = a \cdot 10 + b \\ 750 = a \cdot 15 + b \end{cases}$$

Lo que tenemos es un sistema de ecuaciones lineales, el cual puede tener solución (**compatible**) o no tenerla (**incompatible**). Los sistemas compatibles pueden tener una solución (**determinados**) o infinitas (**indeterminados**). No obstante, sabemos que en nuestro caso el sistema tiene solución, pues por dos puntos distintos pasa necesariamente una recta.

Te invitamos a ver un video donde se explica lo que entendemos por sistemas de ecuaciones lineales a dos variables y su resolución.

Descripción	Dirección URL
Sistemas de ecuaciones lineales	https://youtu.be/oQQfG1zIPMc

La resolución del sistema la podemos hacer por varios métodos, entre ellos, el uso de software (GeoGebra en nuestro caso). Si no utilizamos software, apelaríamos a un método intuitivo que es el de sustitución (despejamos una variable de una ecuación y la sustituimos en la otra). Así, por ejemplo, si despejamos b de la primera ecuación tendremos:

$$1000 - 10a = b$$

Sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos para la variable a.

$$750 = 15a + 1000 - 10a$$

$$750 - 1000 = 15a - 10a$$

$$-250 = 5a$$

$$a = -50$$

Teniendo el valor de a, podemos encontrar el de b:

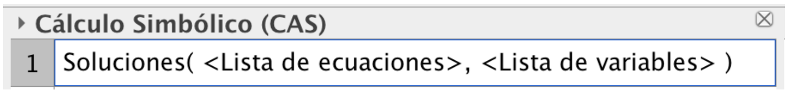
$$b = 1000 - 10 \cdot (-50)$$

$$b = 1000 + 500$$

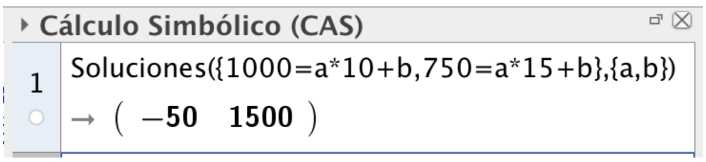
$$b = 1500$$

Así determinamos la ecuación de demanda $p = -50q + 1500$.

Si recurrimos al software, activaremos la vista de Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra y usaremos la función:



La lista de ecuaciones tendremos que ponerla entre llaves, al igual que la lista de variables, separadas por comas, tal como lo muestra la siguiente imagen:



Como las variables las indicamos en un cierto orden ($\{a, b\}$) tenemos que entender que la solución está dada como par ordenado con ese criterio. Esto es, el primer valor corresponde para a y el segundo para b.

Al tener la ecuación de demanda podemos estructurar la función de Ingresos

$$Ingreso\ por\ Ventas = (ecuación\ de\ demanda) \cdot (cantidad)$$

$$Ingreso\ por\ Ventas = (-50q + 1500) \cdot q$$

$$Ingreso\ por\ Ventas = -50q^2 + 1500q$$

No perdamos de vista que la primera pregunta que se formula en el problema es: *¿Qué cantidad se debería producir para obtener la máxima utilidad?* En consecuencia, aún nos queda por encontrar la función de Costo Total para establecer la de Utilidad.

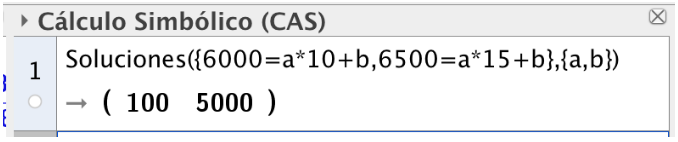
Como la función de **Costo Total** es lineal, tendrá la siguiente estructura:

$$C = a \cdot q + b$$

y los pares ordenados $(10, 6000)$ y $(15, 6500)$ satisfacen esta ecuación. Por tal razón, se debe cumplir que:

$$\{6000 = a \cdot 10 + b\ 6500 = a \cdot 15 + b$$

Nuevamente tenemos un sistema de ecuaciones y podemos usar GeoGebra para encontrar la solución:



Así, la ecuación de **Costo Total** resulta ser la siguiente:

$$C = 100q + 5000$$

Podemos estructurar la función de **Utilidades** y lo hacemos del siguiente modo:

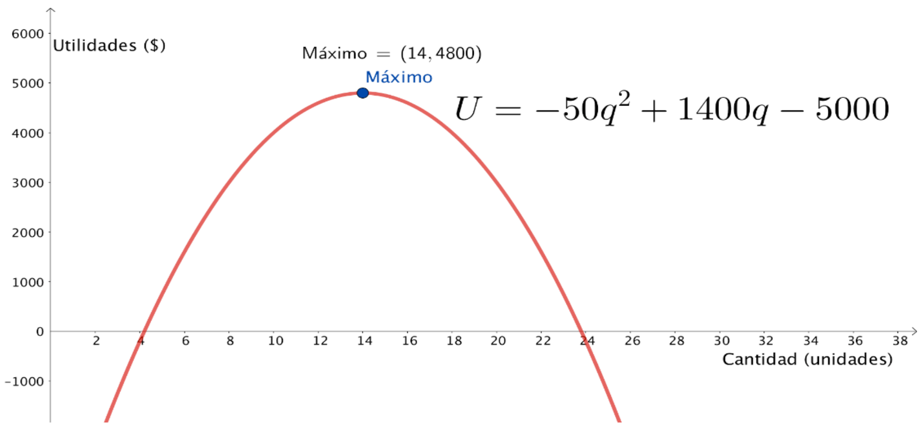
$$Utilidades = Ingreso\ por\ Ventas - Costo\ Total$$

$$Utilidades = (-50q^2 + 1500q) - (100q + 5000)$$

$$Utilidades = -50q^2 + 1500q - 100q - 5000$$

$$Utilidades = -50q^2 + 1400q - 5000$$

La función de **Utilidades** es una expresión polinómica de grado 2, y geométricamente se corresponde con una parábola. El valor máximo lo encontramos en el vértice (por tener coeficiente principal negativo, lo cual indica que las ramas van hacia abajo). Para el cálculo del vértice podríamos usar fórmula o recurrimos a GeoGebra, graficando la función y usando la función Máximo(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>) en la barra de entrada.



Esto nos dice que el máximo de utilidades se logra con 14 unidades del producto y las mismas ascienden a $4800.

Para responder a la segunda pregunta del problema, la cual expresa que: *Si se dispone de hasta $7000 para la producción, ¿cuántos artículos se podrían producir?, ¿es conveniente producir esa cantidad?,* tendremos que plantear una desigualdad o inecuación con la función de **Costo Total**.

$$100q + 5000 \leq 7000$$

La resolución algebraica es sencilla, tal como se muestra a continuación:

$$100q \leq 7000 - 5000$$

$$100q \leq 2000$$

$$q \leq 20$$

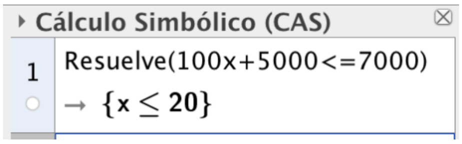
Esto nos indica que se pueden producir hasta 20 unidades del producto. De todos modos, no resulta conveniente pues las máximas utilidades se lograban con 14 unidades. Podríamos calcular las Utilidades para 20 unidades y las mismas arrojan el siguiente valor:

$$Utilidades(20) = -50 \cdot 20^2 + 1400 \cdot 20 - 5000$$

$$Utilidades(20) = 3000$$

Recordemos que para 14 unidades las Utilidades resultaban ser de $ 4800.

La resolución de la desigualdad también podríamos hacerla con GeoGebra:



La resolución completa de este problema te la mostramos en el siguiente video:

Descripción	Dirección URL
Problema de Administración	https://vimeo.com/ucasal/review/394921283/f8508c6222

TRABAJO PRÁCTICO N° 2

Objetivos:

Con este Trabajo práctico nos proponemos evaluar tus competencias para:

- Resolver problemas aplicados, interpretando adecuadamente la información que suministran las respuestas, cálculos e índices obtenidos.
- Aplicar adecuadamente reglas y procedimientos matemáticos a problemas.
- Interpretar y anticipar comportamientos de distintos fenómenos

Para el trabajo práctico queremos que discutas las respuestas en el **Foro de consultas** y participes debatiendo con tus compañeros.

¿Cómo podés participar?

(1) Incluyendo respuestas a los problemas del práctico.

(2) Complementando la información que brindó otra persona.

(3) Refutando la resolución que hizo otra persona.

Actuá como líder y tomá la iniciativa. No esperes que otros hagan el trabajo de proponer las soluciones a los problemas y solamente te limitás a controlar tus respuestas. Tené presente que:

> "Nadie sabe todo, todos saben algo,
> todo el conocimiento reside en la humanidad"
>
> Pierre Levy (1999)

ACTIVIDADES

Problema 1. Un trabajo puede ser realizado por 80 obreros en 42 días. Si el plazo para terminarlo es de 30 días ¿cuántos obreros deberán agregarse, suponiendo que todos mantienen el mismo ritmo?

Problema 2. Si para pintar 180 m^2 se necesitan 24 kg de pintura ¿cuántos kg se necesitarán para pintar una superficie rectangular de 12 m de largo por 10 m de ancho, y del mismo tipo?

Problema 3. Se tienen fardos de alfalfa suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días se podrán alimentar con la misma cantidad de fardos a 450 vacas de la misma raza y edad?

Problema 4: Un grupo de personas fue encuestado y 700 de ellas, lo que equivale al 20% del total, favoreció a un nuevo producto sobre la marca de mayor venta. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

Problema 5. Supongamos que dos personas compran un número de rifa en una escuela, por el que pagaron $2000, y obtienen un premio en efectivo de $120.000. Si una de las personas aportó $800 y el resto lo hizo su amigo ¿Cuánto le corresponde del premio a cada uno? Fundamenta la respuesta.

Problema 6. Para crear un micro emprendimiento tres socios aportaron U$S 70.000, U$S 40.000 y U$S 50.000 respectivamente. Si al final de un período contable obtienen una ganancia de U$S 240.000. ¿Cuánto le corresponde a cada uno? Fundamenta la respuesta.

Problema 7. Tres socios invirtieron dinero por partes iguales en un negocio, solo que lo hicieron en diferentes momentos. El socio más antiguo hace 11 meses que está en el negocio, el segundo hace 10 meses y el tercero, hace 9 meses. Si durante el tiempo que viene funcionando el negocio tuvieron una pérdida de $15.000. ¿Cuánto pierde cada uno? Fundamenta la respuesta.

Problema 8. Dos personas forman una sociedad aportando cada uno $400.000 de capital. Al cabo de un año ingresa un tercer socio con el mismo capital, y dos años más tarde, ingresa el cuarto socio que aporta también $400.000. A los 6 años de su fundación se liquida la sociedad, teniendo un beneficio a repartir de $1.100.000. ¿Cuánto le corresponde a cada uno? Fundamenta la respuesta.

Problema 9. Un motor funcionando durante 10 días y trabajando 8 horas diarias ha originado un gasto de $12000. ¿Cuánto gastará el motor del mismo tipo funcionando 18 días a razón de 9 horas diarias? Fundamenta la respuesta.

Problema 10. Una pileta se llenó en 3 días dejando abiertas 2 canillas que arrojan 20 litros por hora, durante 6 horas diarias. ¿Cuántos días se precisarán para llenar la misma pileta si se dejan abiertas, durante 5 horas diarias, 4 canillas que arrojan 18 litros por hora? Fundamenta la respuesta.

Problema 11. Los municipios de dos localidades colindantes desean construir, conjuntamente y para común utilización, un pabellón deportivo, cuyo presupuesto es de $ 60.000.000. La cantidad aportada por cada pueblo se asume que debe ser proporcional al número de habitantes, y el número de éstos es aproximadamente de 17.500 y 62.500. Calcular cuánto debe aportar cada municipio. Fundamenta la respuesta.

Problema 12. Un padre tiene cuatro hijos de 7, 10, 11 y 12 años y les reparte $ 4.000 proporcionalmente a la edad de cada uno. Al mes siguiente, el padre decidió entregar $4.400, aumentando para el reparto en un 10% la parte de cada hijo. Sin embargo, el más pequeño protestó porque se sentía perjudicado. ¿Tenía razón? Fundamenta la respuesta.

Problema 13. Para averiguar cuántos kilómetros recorría un auto con un litro de nafta, antes de viajar, se le llenó el tanque de combustible. Al llegar a la ciudad de Córdoba se volvió a llenar el tanque de combustible y para hacerlo se cargaron 16 litros. Sabiendo que la distancia recorrida hasta Córdoba fue de 153 km ¿cuántos litros de combustible, aproximadamente, consumirá el auto si de Córdoba debe ir a La Falda, que se encuentra a 76 km de distancia? Fundamenta la respuesta.

Problema 14. Una compañía fabrica un producto a un costo variable de $ 12,20 por unidad. Si los costos fijos son de $ 195.000 y cada unidad se vende a $ 17, ¿cuántas unidades deben ser vendidas para que la compañía tenga al menos una utilidad de $ 150.000? Fundamenta la respuesta.

Problema 15. Una compañía inmobiliaria tiene en alquiler 150 oficinas. Cada una puede alquilarse en 400 dólares mensuales. Sin embargo, por cada incremento de 20 dólares mensuales se sabe que quedarán 2 oficinas vacantes sin posibilidad de que sean ocupadas. La compañía quiere obtener al menos un total de 90.000 dólares mensuales de alquiler por estas oficinas. Determine el valor del alquiler que debe cobrarse por cada oficina. ¿Es único el valor del alquiler? Fundamenta la respuesta.

Problema 16. En una oferta, una tienda de artículos deportivos redujo un 24% el precio de las zapatillas, para alcanzar un precio de $ 3382. ¿Cuál era el precio original? Fundamenta la respuesta.

Problema 17. Al planear una fiesta escolar, se encuentra que una banda toca por $ 5000, más el 50% del total de venta por entradas. Otra banda lo hace por una cuota fija de $11600. Para que a la institución escolar le sea más rentable la primera de las bandas, ¿cuál es el precio máximo que puede cobrar por entrada, suponiendo que la asistencia será de 300 personas? Fundamenta la respuesta.

Problema 18. Una compañía ofrece dos alternativas de salario para sus empleados.

Plan A: Un salario mensual de $15500 más una comisión del 4% sobre el total de ventas.

Plan B: Un salario mensual de $17500 más una comisión de 5% sobre las ventas que superen los $200.000.

¿Para qué monto de ventas totales es mejor el plan B que el plan A, suponiendo que el total de ventas siempre sea superior a $ 200.000? Fundamenta la respuesta.

Problema 19. La directiva de una compañía quiere saber cuántas unidades de su producto necesita vender para obtener una utilidad de al menos $ 100.000. Está disponible la siguiente información: precio de venta por unidad, $ 20; costo variable por unidad, $ 15; costo fijo total, $ 600.000. A partir de estos datos determine las unidades que deben ser vendidas. Fundamenta la respuesta.

Problema 20. Durante el mes de marzo del corriente año un fabricante de tornillos encontró que el 3% de los mismos eran rechazados por imperfecciones. Para el mes de abril se proyecta que la demanda de tornillos de este tipo será de 2.000.000 de unidades aproximadamente, ¿Cuántos tornillos se tendrán que producir si se toman en cuenta los datos suministrados durante el mes de marzo? Fundamenta la respuesta.

Problema 21. Un estacionamiento tiene 120 metros de largo por 80 metros de ancho. Debido a un incremento en el personal, se decidió duplicar el área del lote aumentando franjas de igual ancho en un extremo y un lado (en forma de escuadra). Determina el ancho de cada franja, fundamentando la respuesta.

Problema 22. La ecuación de demanda para un producto es $q = 800 - 2^p$, donde q se expresa en toneladas y p en dólares. Encuentra el precio que esperan los consumidores cuando se demandan 60 toneladas del producto. Fundamenta la respuesta.

Problema 23. Para una compañía, el costo para producir miles de unidades de un producto está dado por la ecuación:

$$C = ln\, ln\,(2q^5) + 20$$

Donde C se expresa en miles de dólares. Determina la cantidad de unidades que producen un costo de 60 mil dólares, fundamentando la respuesta.

Problema 24. La ecuación de oferta de un fabricante es:

$$p = log\left(10 + \frac{q}{2}\right)$$

donde *q* es el número de unidades ofrecidas con el precio *p* por unidad (en U$S).

a. ¿A qué precio por unidad ofrecerá el fabricante 500 unidades? Fundamenta la respuesta.
b. Si el precio que oferta el comerciante es de U$S 3.10 por unidad ¿cuántas unidades estaría ofreciendo? Fundamenta la respuesta.

Problema 25. Una persona viaja a Europa y quiere contratar los servicios de telefonía celular para disponer de conectividad a Internet y comunicación con sus familiares de Argentina. Después de analizar diversos planes, su decisión queda entre los dos siguientes. El plan A, con un costo mensual de U$S10 dólares mensuales más U$S 0.20 por cada minuto de tiempo aire. El plan B, con un costo mensual de U$S 20 más U$S 0.12 por cada minuto de tiempo aire. Determina el número de minutos mensuales que debe utilizar esta persona, para que el plan B le resulte más conveniente que el plan A. Fundamenta la respuesta.

Problema 26. Una persona dispone de un total de U$S 55.000 para realizar una inversión. Puede elegir entre bonos emitidos por el estado, que ofrecen una tasa de interés del 6% anual, o bien, con un riesgo mayor, bonos hipotecarios con una tasa de interés del 9% anual. Ante esta situación decide invertir en ambos bonos, pero requiere que en concepto de intereses reciba al menos U$S 3900 al año ¿Qué cantidad máxima debe invertir en bonos del estado? Fundamenta la respuesta.

Problema 27. Una persona puede vender una cierta cantidad de paquetes de software cada semana (que representamos con la variable *q*), a un precio *p* expresado en dólares, y ha establecido la siguiente ecuación de demanda: $p = 70 - q$ ¿Cuántos paquetes por semana debe vender para obtener ingresos mínimos de U$S1200? Fundamenta la respuesta.

Problema 28. Un gerente de una distribuidora de televisores tipo Smart, sabe que a un precio de *p* dólares por unidad de cierto modelo pueden venderse *q* unidades al mes y la relación entre precio y las unidades vendidas es $p = 1000 - 2q$. ¿Cuántas unidades debe vender la distribuidora para que los ingresos mensuales sean de al menos U$S 45.000? El precio de ese modelo de televisor no puede ser menor a U$S 300. Fundamenta la respuesta.

Problema 29. Consideremos las mismas condiciones establecidas para el problema 30. Además, sabemos que los costos totales de la distribuidora de televisores Smart están dados por la siguiente expresión:

$$C = 6000 + 300q$$

Donde C viene dado en dólares y q en cantidades enteras. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse cada mes para que la utilidad mensual sea al menos $13200? Fundamenta la respuesta.

Problema 30. En un terreno de cultivo familiar, se tuvo una cosecha de 500 kilogramos de frutillas, pero debe venderlas rápidamente, pues los costos de almacenamiento son muy altos. Además, se sabe que el precio que se fije debe ser menor a U$S 5 el kilogramo. Por otro lado, la ecuación de demanda está dada por $q = 500 - 50p$. ¿Qué precio debería estar fijándose con el propósito de obtener ingresos de al menos U$S 1200? Fundamenta la respuesta.

Problema 31. Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, sobre el valor de compra, con lo que su beneficio total sería de 600.000 euros. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, 90% y 85%, respectivamente, sobre el valor de compra, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto? Fundamenta la respuesta.

Problema 32. Un viajero que acaba de regresar de un viaje por Europa gastó 30 euros diarios en Inglaterra, 20 euros diarios en Francia y 20 en Italia por concepto de hospedaje. En comida gastó 20 euros diarios en Inglaterra, 30 en Francia y 20 en Italia. Sus gastos adicionales fueron de 10 euros diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de 340 euros en hospedaje, 320 en comida y 140 en gastos adicionales durante el viaje. Calcula el número de días que pasó en cada país. Fundamenta la respuesta.

Problema 33. Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a 3 establecimientos que demandan toda la producción. En una determinada semana, el primer establecimiento solicitó tantas unidades como el segundo y el tercero juntos, mientras que el segundo establecimiento pidió el 75% de lo pedido por los otros dos. ¿Cuáles fueron las cantidades solicitadas por los tres establecimientos? Fundamenta la respuesta.

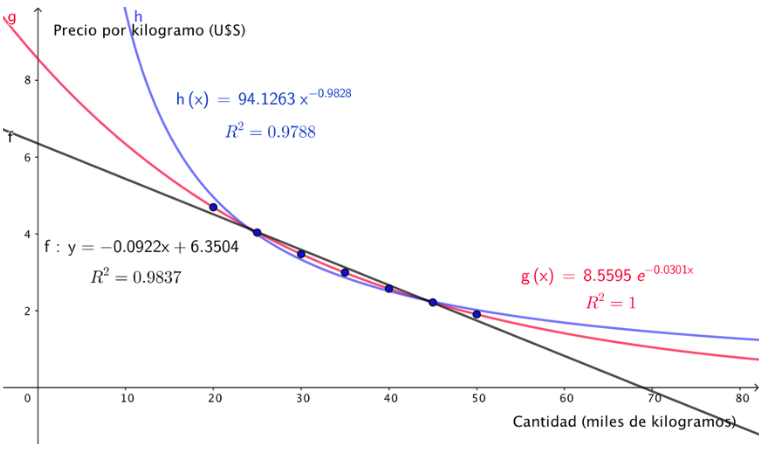
RESPUESTAS A LOS TRABAJOS PRÁCTICOS

Respuestas al Trabajo Práctico Nº 1

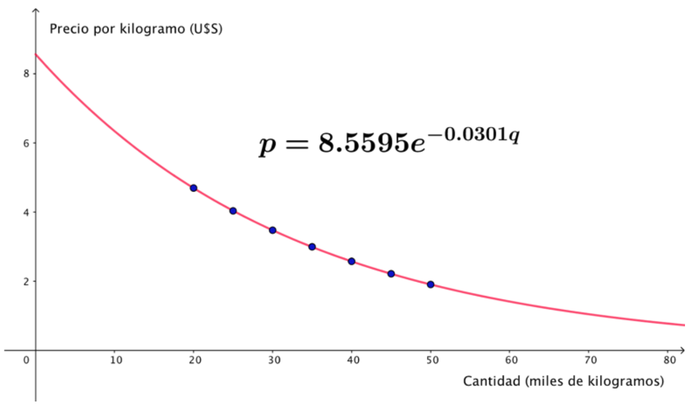
Problema 1:

a) Para determinar la ecuación de demanda tendríamos que ajustar una función decreciente al conjunto de datos que tenemos. Una representación gráfica con GeoGebra de estos puntos es la siguiente:

Las posibilidades de ajustar una función decreciente son varias: lineal, exponencial, potencial, etc. Estos ajustes, con sus correspondientes coeficientes de determinación, quedan registrados en la siguiente gráfica:



El **modelo exponencial** tiene un buen ajuste ($R^2 = 1$, explica el 100% de los datos) y es una función decreciente, razón por la cual lo ofrecemos como respuesta. En consecuencia, expresamos adecuadamente la ecuación de la demanda usando las variables habituales (p y q) y restringimos el dominio de la función a los enteros mayores o iguales a cero.



b) Para determinar el precio para una demanda de 55 mil kilogramos es suficiente sustituir a la cantidad en la ecuación de demanda. En consecuencia tendremos:

$$p(55) = 8.5595e^{-0.0301 \cdot 55} \approx 1.64$$

Esto es, para un precio de U$S 1.64 se demandarán 55 mil kilogramos del producto.

c) Para determinar la cantidad demandada tendremos que resolver la siguiente ecuación:

$$8.5595228\, e^{-0.0300895q} = 4.5$$

$$e^{-0.0300895q} = \frac{4.5}{8.5595228}$$

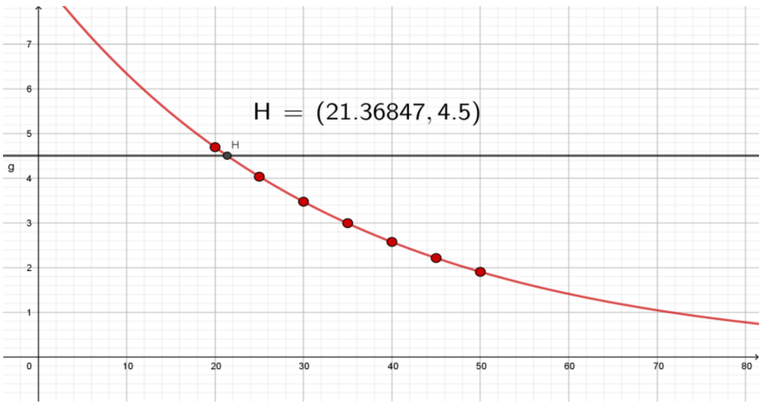
$$-0.0300895q ln(e) = ln(0.52573024)$$

$$q = \frac{ln(0.52573024)}{-0.0300895}$$

$$q \approx 21.36847$$

Esto nos dice que para un precio de U$S 4,50 se demandarán 21368,47 kilogramos del producto.

Otro modo de obtener la respuesta es buscar la intersección de la recta $y = 4.5$ con la gráfica de la función de demanda (pidiendo al GeoGebra que encuentre la intersección).



Problema 2:

a) Tenemos que tener en cuenta que:

$$Costos\ Totales = Costos\ Variables + Costos\ Fijos$$

En consecuencia:

$$CT(q) = 15q + 80000$$

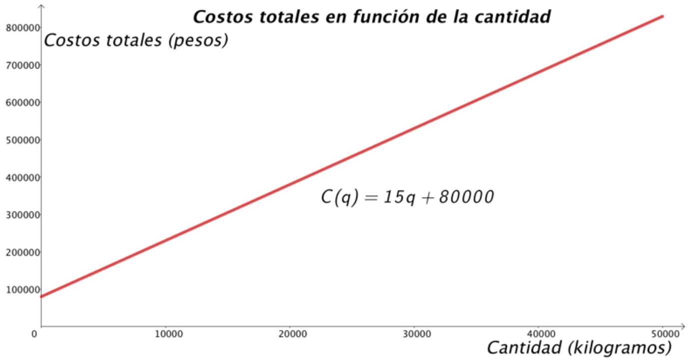
b) Como se establece un máximo de producción de 50.000 kilogramos, entonces el dominio estará dado por los valores mayores o iguales a 0 pero menores o iguales a 50.000. Matemáticamente lo decimos de la siguiente manera:

$$Dominio = [0,50000]$$

El rango, en tanto, corresponde a los valores de los Costos Totales para ese dominio. El valor mínimo será de 80000 (que se obtiene para $q = 0$) y el máximo para 830000 (se obtiene por reemplazar a la cantidad por 50000). En consecuencia:

$$Rango = [80000,830000]$$

c) Gráfica de la función.

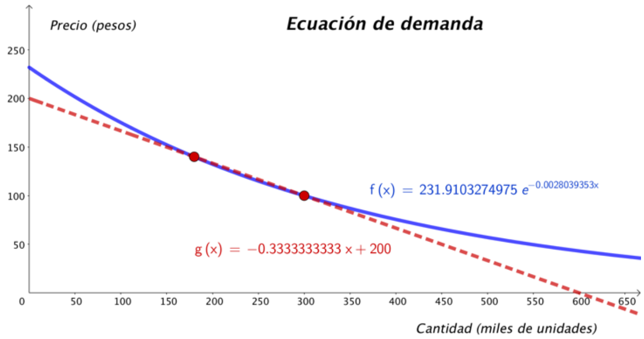


Problema 3:

a) Para encontrar la función de demanda cargamos los datos en una tabla, sabiendo que el precio dependerá de la cantidad.

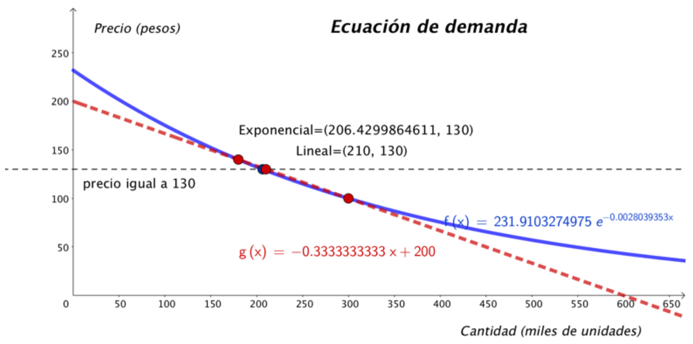
	A	B
1	***Cantidad***	***Precio***
2	300	100
3	180	140

Gráficamente quedan dos puntos en el plano y por los mismos pueden pasar todas las funciones que se nos ocurran. Por ejemplo, si decidimos por un modelo exponencial o uno lineal (usuales en la teoría económica) nos quedarían las siguientes funciones y representaciones gráficas



Los dominios y rangos de están funciones dependerán del modelo escogido. Si consideramos un modelo lineal, tendrá un dominio y rango acotado a intervalos cerrados, mientras que para el modelo exponencial, el rango estará acotado, mientras que el dominio serán los números mayores o iguales a cero.

b) Como debemos anticipar la cantidad demandada para un precio de $130, y el mismo interpola los datos brindados, con cualquiera de los dos modelos obtendremos valores similares.



En GeoGebra podemos hacer este cálculo ingresando en la barra de entrada la función $y = 130$ y posteriormente pedimos la intersección de curvas, identificando los puntos (como se puede observar en la representación gráfica)

Otra manera de hacerlo es algebraicamente:

$$-0.33333q + 200 = 130$$

De donde obtenemos $q = 210$ mil unidades.

En el modelo exponencial será algo más laborioso por el tipo de números que obtuvimos, razón por la cual los nuevos recursos (uso de *software*) resulta conveniente. La ecuación a resolver será:

$$231{,}91e^{-0.0002803q} = 130$$

De la cual obtenemos $q = 206.43$ miles de unidades. s

Problema 4:

Para determinar la función podemos hacer una tabla de valores y calcular los seguros correspondientes:

	A	B
1	***Póliza***	***Cuota***
2	20000	200
3	30000	225
4	40000	250
5	50000	275
6	60000	300
7	70000	325
8	80000	350
9	90000	375

¿Cómo se calcula cada cuota? Haciendo la siguiente cuenta:

$$Cuota\ fija + \frac{Póliza}{1000} \cdot 2.50$$

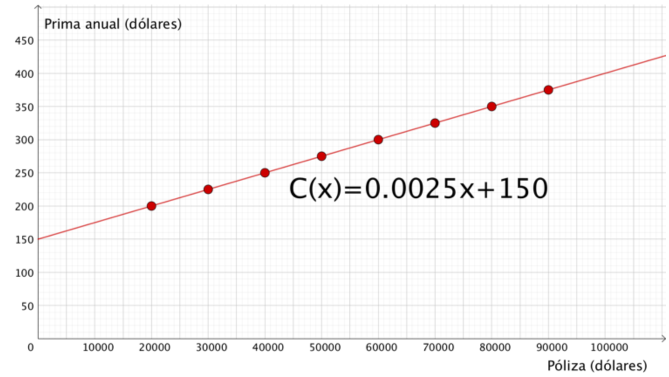
La póliza hay que dividirla por 1000 pues los U$S 2.50 corresponden cada 1000 dólares de la cantidad.

Si representamos con x al valor de la póliza que desconocemos y con C al valor de la prima anual, tendremos la siguiente función:

$$C(x) = 150 + \frac{x}{1000} \cdot 2.50$$

$$C(x) = 150 + 0.0025x$$

También podríamos obtener esta expresión haciendo un ajuste adecuado con GeoGebra o Excel a la tabla de datos. En este caso resulta:

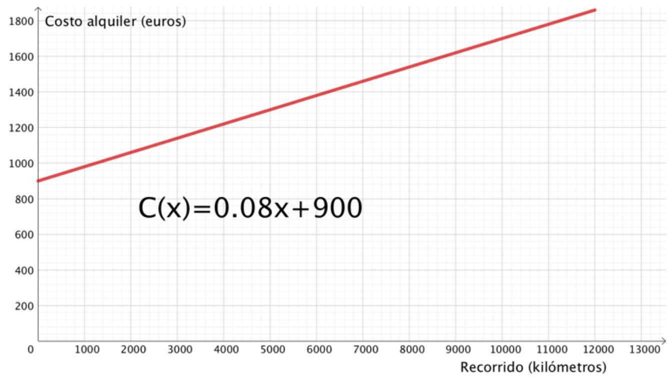


Problema 5:

a) Para establecer una función que exprese el costo de alquiler de un automóvil de porte mediano, si se hace un contrato por un mes, definimos las variables a utilizar. Por un lado, la variable independiente, la cual estará dada por el recorrido que hizo el automóvil en el mes, medido en kilómetros (supongamos que designamos con x a esta variable). Por otro lado, la variable dependiente, que corresponde al costo del alquiler, en euros, y que designamos con la letra C. Un automóvil de porte mediano tiene un valor de 30 €/día, con un contrato de un mes (es decir $30 \cdot 30 = 900$ euros como cargo fijo). A su vez, tenemos € 0,08 por kilómetro conducido, con un límite diario de 400 km a recorrer ($400 \cdot 30 = 12000$ kilómetros al mes). Entonces:

$$C(x) = 900 + 0.08x$$

b) Gráfica de la función:



Dominio: $[0{,}12000]$ Rango: $[900{,}1860]$

c) Para calcular cuánto habría pagado una persona al finalizar el contrato si en el mes recorrió 2357 kilómetros, sustituimos este valor en la función y obtenemos €1088,56

Problema 6:

a) Para determinar el valor que se estima tendrá el automóvil en registros contables para el año 2020, prescindiendo de la inflación y otros índices, necesitamos encontrar un modelo funcional. Ese modelo podemos encontrarlo analizando la información, y en consecuencia, si llamamos V al valor en registros contables del automóvil y t al tiempo transcurrido desde su compra, tendremos:

$$V(t) = 180000 - 0{,}05 \cdot 180000t$$

$$V(t) = 180000 - 9000t$$

También podríamos hacer una tabla de valores y realizar el ajuste correspondiente en un *software* como GeoGebra o Excel.
Como transcurrieron 5 años desde el 2015 hasta el 2020, sustituimos este valor en la función:

$$V(5) = 180000 - 9000 \cdot 5 = 135000$$

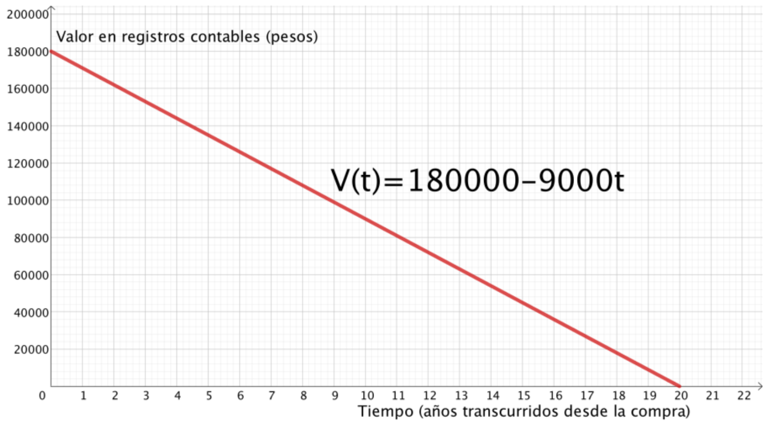
En consecuencia, el automóvil tendrá un valor de $135000 en registros contables para el año 2020.
b) Para calcular cuánto tiempo transcurrirá para que el automóvil tenga un valor en registros contables equivalente al 25% de su valor de compra, tendremos que resolver una ecuación lineal sencilla.

$$180000 - 9000t = 0.25 \cdot 180000$$

$$180000 - 9000t = 45000$$

$$t = 15$$

Esto nos dice que transcurrirán 15 años
c) Gráfica de la función.



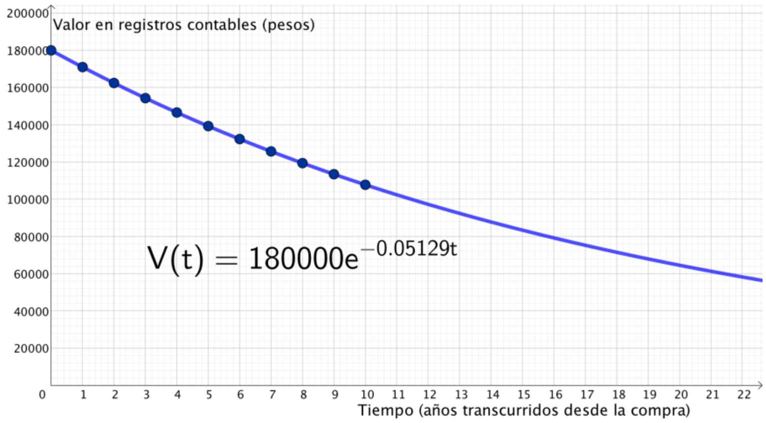
d) Si la devaluación de produce sobre el valor que tiene el automóvil el año anterior, la misma cambia y no podría ajustarse a un modelo lineal, sino exponencial. En este caso, al devaluarse un 5% sobre el valor del año anterior, quiere decir que nos quedamos con el 95% del valor del auto. En consecuencia:

$$V(t) = 1800000 \cdot 0.95^{t} t$$

También podríamos hacer una tabla de valores y realizar un ajuste exponencial, tal como se muestra a continuación:

	A	B
1	***Tiempo***	***Valor***
2	0	180000
3	1	171000
4	2	162450
5	3	154327.5
6	4	146611.13
7	5	139280.57
8	6	132316.54
9	7	125700.71
10	8	119415.68
11	9	113444.89
12	10	107772.65

=B2 –0.05*B2

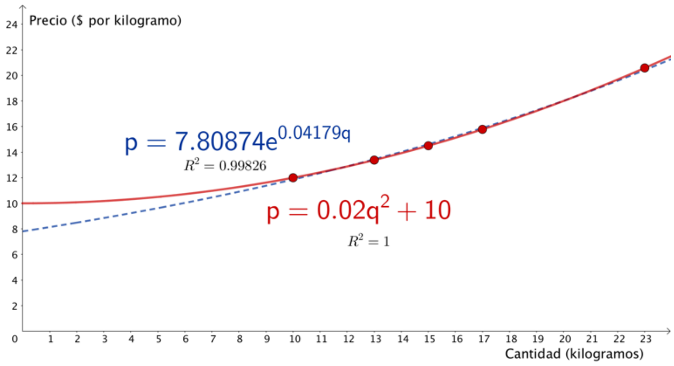


Para el año 2020 el valor en registros contables del automóvil sería de $\$139280{,}57$.

Problema 7:

En primera instancia tendremos que buscar un modelo funcional adecuado que relacione el precio con la cantidad. Asimismo, hay que tener en cuenta que una función de oferta debe ser creciente.

En la siguiente representación gráfica tenemos dos modelos, donde el más adecuado termina siendo el polinómico de grado dos, en tanto es una función creciente para valores positivos de la cantidad y tiene un coeficiente de determinación igual a 1 (explica el 100% de los datos).



a) Teniendo la ecuación de oferta, para determinar el precio simplemente sustituimos la cantidad por $q = 30$. Esto nos arroja un precio de U$28 por kilogramo.

b) Para determinar la cantidad para un precio de $50 por kilogramo, resolvemos la siguiente ecuación:

$$0.02q^2 + 10 = 50$$

$$0.02q^2 = 50 - 10$$

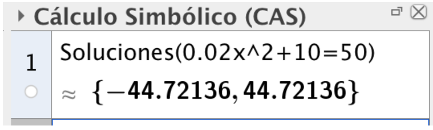
$$0.02q^2 = 40$$

$$q^2 = \frac{40}{0.02}$$

$$q = \sqrt{2000}$$

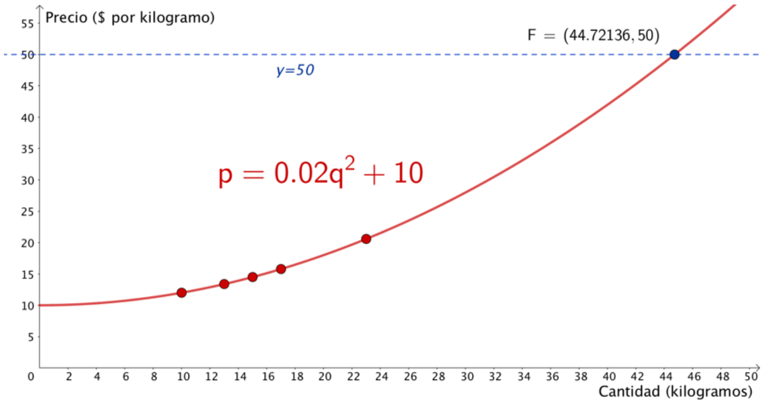
$$q \approx 44{,}72$$

También podemos recurrir al **Cálculo Simbólico** (CAS) de GeoGebra y usamos la herramienta Soluciones(<Ecuación>). Solicitamos que la respuesta la ofrezca aproximada, ticando el símbolo ≈ en la barra superior. Obtendremos lo siguiente:



Otra alternativa es trabajar con la vista gráfica de GeoGebra. Para ello, ingresamos en la barra de entrada la función $y = 50$. Posteriormente, con el comando **intersección** 

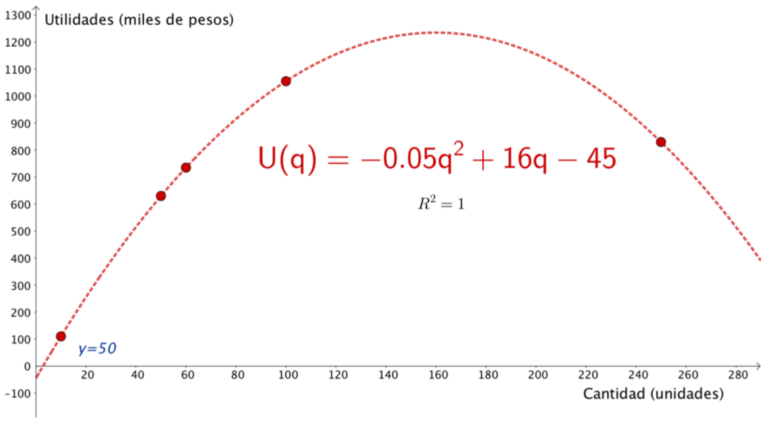
, pedimos el punto de encuentro entre la función de oferta y el precio dado por $y = 50$.



Nuevamente la respuesta indica que para un precio de $50 por kilogramo se tendrían que ofertar 44,72 kilogramos.

Problema 8:

Procedemos a encontrar un modelo funcional que relaciones las utilidades anuales de una empresa con las cantidades producidas y vendidas de un cierto producto, el cual se refleja en la siguiente representación gráfica:



a) Para calcular la utilidad esperada si se venden 120 unidades, reemplazamos en el modelo función determinado.

$$U(120) = -0.05 \cdot 120^3 + 16 \cdot 120 - 45$$

$$U(120) = 1155$$

En consecuencia, las utilidades serán de $ 1.155.000

b) Calcular la cantidad de unidades que deberían ser vendidas que logran las utilidades máximas, corresponde matemáticamente al vértice de la función de segundo grado. En consecuencia, si tenemos presente que para una función de segundo grado de la forma $y = ax^2 + bx + c$ la abscisa del vértice se calcula mediante la fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$, resulta:

$$q_v = -\frac{16}{2 \cdot (-0.05)} = 160$$

Sustituyendo 160 en la función de Utilidades obtenemos:

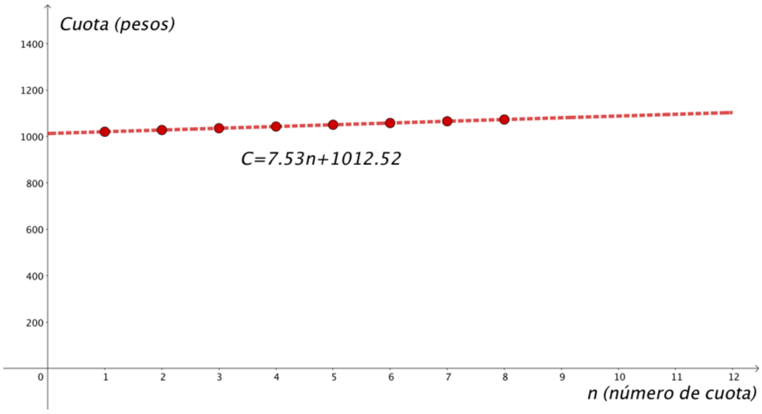
$$U(160) = 1235$$

En consecuencia, las utilidades máximas serán de $ 1.235.000.

En GeoGebra se podría buscar el máximo de la función mediante el comando: Máximo(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>). Se introduce en la barra de entrada, reemplazando la función por el nombre que le dio el *software* (f por ejemplo), y en los extremos (inferior y superior) por dos valores del dominio que contengan al que produce el máximo (100 y 200 por ejemplo).

Problema 9:

Es posible anticipar los montos a pagar pues los valores suministrados en la tabla corresponden a un modelo lineal, cuyo coeficiente de determinación es 1 (el modelo explicaría el 100% de los datos). La representación gráfica de la función y su expresión analítica es la siguiente:

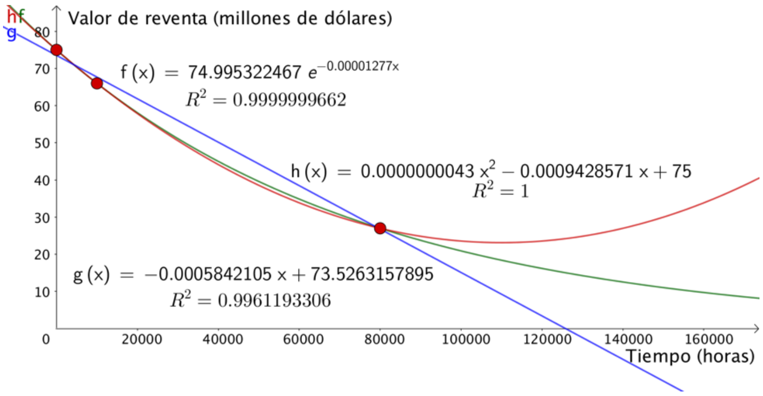


Asimismo, los montos a pagar en los próximos 4 meses se registran en la tabla siguiente tabla:

	A	B
1	***n***	***Cuota***
2	1	1020.04
3	2	1027.57
4	3	1035.11
5	4	1042.64
6	5	1050.17
7	6	1057.69
8	7	1065.21
9	8	1072.73
10	9	1080.27
11	10	1087.8
12	11	1095.32
13	12	1102.85

Problema 10:

Realizamos, en primera instancia, un ajuste funcional que modelice la situación. Podemos ver que por tres puntos del plano no alineados tendríamos en modelo polinómico de segundo grado (parábola) como mejor ajuste, pero lo desechamos porque el mismo no refleja lo que acontece en la realidad (crece el valor de reventa al aumentar el tiempo de horas de vuelo del avión). En consecuencia, nos quedamos con un modelo exponencial, el cual resulta adecuado para el problema.



Con el modelo funcional podemos responder a los cuestionamientos realizados.

a) El valor esperado después de 100000 horas de tiempo de vuelo del avión resulta de sustituir el número de horas en el modelo funcional:

$$V(100000) = 74.995322467e^{-0.00001277\cdot 100000} \approx 20.91420324$$

Es decir, $20914203{,}24$ dólares

b) Si consideramos el modelo exponencial sabemos que la gráfica tiene por asíntota al eje de las abscisas y no lo interseca. En consecuencia, no existe tiempo de vuelo para el cual el valor de recuperación sea igual a cero. Si bien podemos pensar que tiene sentido hacerse esta pregunta sabemos que con fines contables tendrá un valor, aunque sea mínimo.

c) La intersección de la función con el eje de las ordenadas nos indica el valor de reventa que tiene el avión a pesar que no tenga horas de vuelos. Este valor no es igual a 80 millones (aproximadamente 75 millones), pues se asume que en la compra se pagan impuestos y tasas que no se trasladan al valor de reventa.

Problema 11:

a) Para determinar el valor que se estima tendrán las maquinarias en registros contables, prescindiendo de la inflación y otros índices, necesitamos encontrar un modelo funcional. Ese modelo podemos encontrarlo analizando la información, y en consecuencia, si llamamos V al valor en registros contables de las maquinarias y t al tiempo transcurrido desde la compra, tendremos:

$$V(t) = 30000 - 0{,}02 \cdot 30000t$$

$$V(t) = 30000 - 600t$$

También podríamos hacer una tabla de valores y realizar el ajuste correspondiente en un *software* como GeoGebra o Excel.

b) En la expresión analítica intervienen dos constantes y 2 variables cuyos significados son:
V: Variable dependiente y representa al valor en dólares que tienen las maquinarias en registros contables.
30000: Constante y término independiente del modelo. Representa el valor en dólares de compra de las maquinarias, o sea, el que corresponde al tiempo cero.
-600: constante y pendiente del modelo funcional. Representa la pérdida de valor anual en registros contables que tienen las maquinarias y de allí que su unidad de medida es dólares por año o dólares/año.
t: variable independiente del modelo funcional y representa el tiempo transcurrido desde la compra de las maquinarias.
c. El dominio está dado por los valores que puede tomar la variable independiente (tiempo transcurrido en nuestro caso) y tiene sentido hasta que el valor en registros contables sea cero.

$$30000 - 600t = 0$$

$$t = 50$$

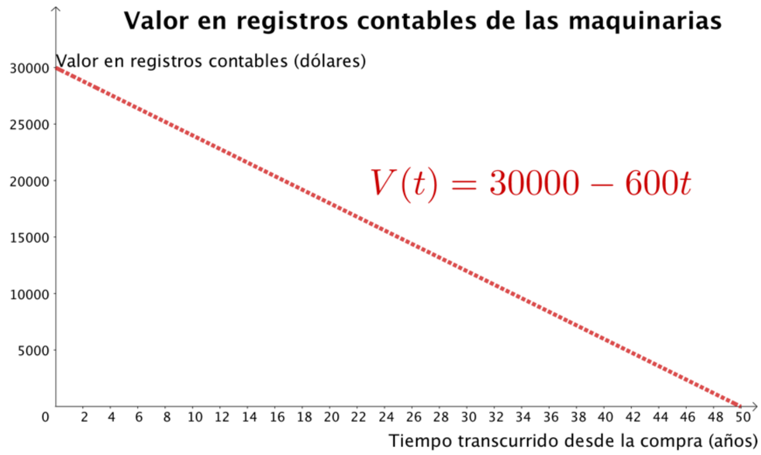
En consecuencia:

$$Dominio = [0{,}50]$$

La imagen o rango estará dado por los valores que toma la variable dependiente. De allí tenemos:

$$Imagen = [0{,}30000]$$

d. Gráfica de la función.

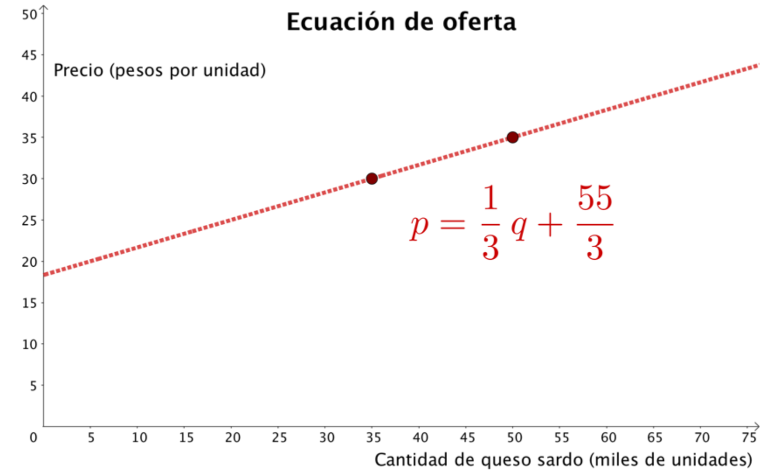


Problema 12:

a) Puesto que el modelo es lineal, no tenemos que tomar decisiones sobre otros posibles ajustes. Realizamos una tabla adecuada, sabiendo que el precia está en función de la cantidad:

	A	B
1	***Cantidad***	***Precio***
2	50	35
3	35	30

Teniendo la tabla, solicitamos que se grafiquen los puntos y ajustamos el modelo funcional correspondiente.



Nota: GeoGebra no dará la respuesta 1/3 o 55/3, sino más bien aproximaciones decimales a estos números.

b) La pendiente de este modelo funcional es 1/3 y significa el aumento de precio por unidad. En el contexto del problema se entiende que por cada 3 mil unidades de queso sardo ofertadas, el precio se eleva 1 peso.

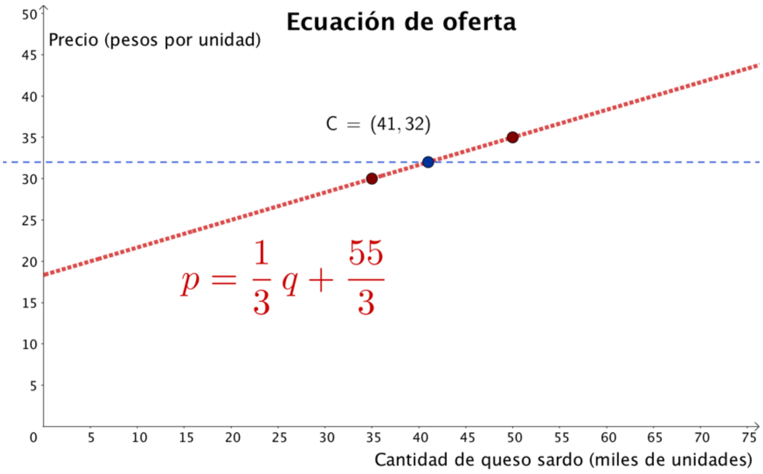
La ordenada al origen (55/3) corresponde al precio para el cual no se oferta ninguna unidad de queso sardo. En este caso, ese precio será de U$S 18,33.

c) Para anticipar la cantidad ofertada si el precio se establece en U$S 32, tendremos que resolver la siguiente ecuación lineal: hi

$$\frac{1}{3}q + \frac{55}{3} = 32$$

La resolución de la misma arroja el valor $q = 41$, es decir, 41 mil unidades de queso sardo deberían ser ofertadas a ese precio.

También podríamos obtener este valor ingresando la función $y = 32$ en la barra de entrada de GeoGebra y buscando la intersección entre las rectas:



En este último caso, matemáticamente estamos resolviendo de forma gráfica el sistema de ecuaciones:

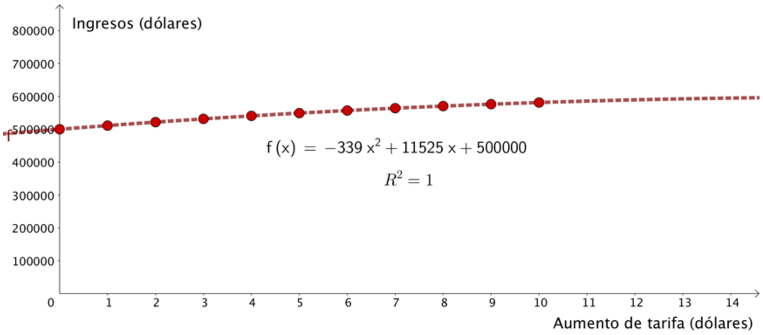
$$\begin{cases} p = \frac{1}{3}q + \frac{55}{3} \\ p = 32 \end{cases}$$

Problema 13:

Para responder a las preguntas que nos plantean, busquemos en primera instancia un modelo funcional apropiado que describa el fenómeno. Para ello, realizamos una tabla donde registramos los aumentos, cantidad de abonados, tarifa e ingresos de la compañía.

	A	B	C	D
1	**Aumento**	**Abonados**	**Tarifa**	**Ingresos**
2	0	20000	25	500000
3	1	19661	26	511186
4	2	19322	27	521694
5	3	18983	28	531524
6	4	18644	29	540676
7	5	18305	30	549150
8	6	17966	31	556946
9	7	17627	32	564064
10	8	17288	33	570504
11	9	16949	34	576266
12	10	16610	35	581350

Si graficamos los ingresos en función del aumento de tarifa y realizamos un ajuste adecuado, tendremos lo siguiente:



a) Para determinar si es posible aumentar la tarifa y tener ingresos superiores a los U$S 570000, podríamos observar la tabla y nos daríamos cuenta que sí. Sin embargo, la mirada de la tabla no nos deja ver el fenómeno en general. Matemáticamente nos lleva a resolver la siguiente ecuación:

$$-339x^2 + 11525x + 500000 = 570000$$

Es una ecuación de segundo grado y por lo tanto puede tener dos soluciones reales distintas, dos reales iguales o dos no reales. Recordemos que la resolución nos lleva a considerar la ecuación cuadrática de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la cual aplicamos la siguiente fórmula:

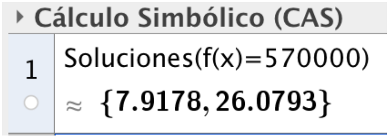
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La resolución de esta ecuación arroja los siguientes resultados:

$$\{7.92; 26.08\}$$

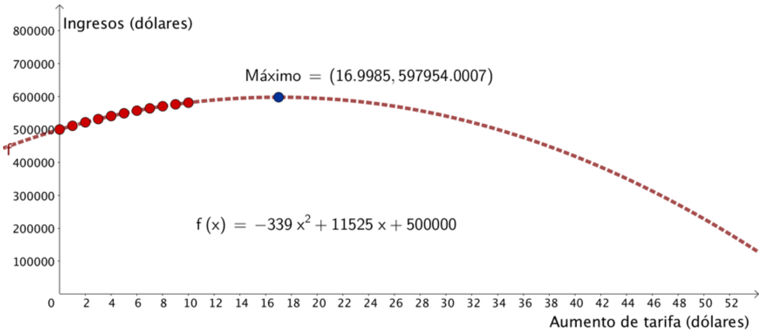
Como estos valores corresponden a aumentos en números enteros de la tarifa, significa que, o bien la aumentamos 8 veces ($25 + 8 = 33$ dólares) o sino 26 veces ($25 + 26 = 51$ dólares).

La resolución de la ecuación también la podríamos haber realizado en Cálculo Simbólico de GeoGebra.



Si la compañía aumenta 8 veces la tarifa tendrá 17966 abonados. Si la aumenta 26 veces, llegando a una tarifa de 51 dólares, tendrá 11186 abonados. Esta última cuenta surge de calcular los ingresos para 26 aumentos de la tarifa (nos daría 570486 dólares). Si al ingreso lo dividimos por la tarifa de 51 dólares nos dará la cantidad de abonados, pues $Ingresos = tarifa \cdot abonados$.

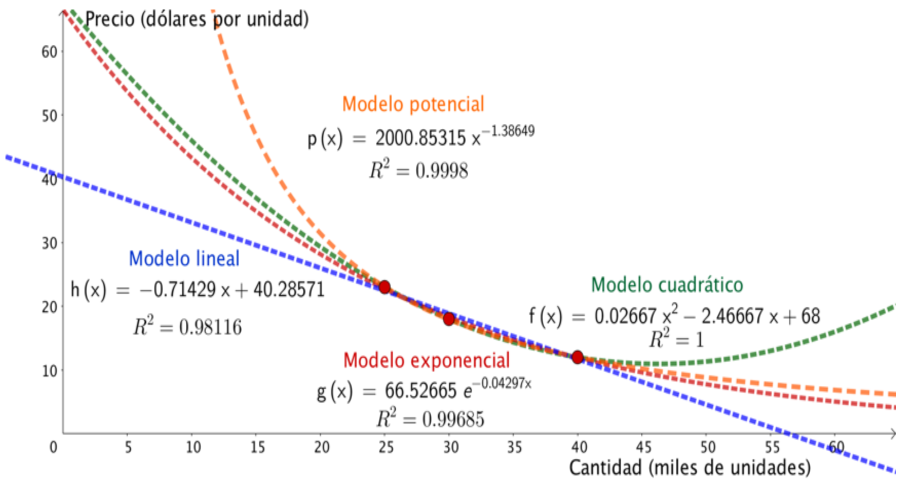
b) Como el modelo funcional es un polinómico de segundo grado y corresponde a una parábola con ramas hacia abajo, se tiene un máximo.



Esto significa que es necesario aumentar 17 veces la tarifa ($25 + 17 = 42$) y se tendrá un ingreso de 597954 dólares.

Problema 14:

a) Para encontrar la ecuación de demanda procedemos a realizar diferentes ajuste funcionales, tal como se aprecia en la siguiente imagen.



Determinar cuál es el modelo más adecuado dependerá del fenómeno a modelizar, coeficiente de determinación y otras variables más. Sabemos que la demanda es una función decreciente, razón por la cual descartamos el modelo cuadrático, a pesar que tiene un coeficiente de determinación igual a 1, pues comienza a crecer a partir de las 38 mil unidades.

El resto de los modelos son adecuados si tuviésemos que interpolar datos (anticipar valores que están entre los brindados). La dificultad se encuentra en que tendremos que anticipar lo que ocurre para 60 mil unidades (extrapolación). El modelo lineal no parecería ser el más sensato, pues los consumidores no llegarían a demandar esa cantidad (la recta atraviesa antes al eje de las abscisas). Tendríamos que escoger entre el modelo exponencial y el potencial, donde cualquiera de los dos resulta apropiado, pues son funciones decrecientes y con muy buenos coeficientes de determinación.

Nos quedamos con el modelo potencial, razón por la cual establecemos que la ecuación de la demanda tendrá la siguiente expresión:

$$p = 2000.85315q^{-1.38649}$$

O también:

$$p = \frac{2000.85315}{q^{1.38649}}$$

donde p está dada en dólares y q en miles de unidades.

b) Valuando la función de demanda en 60 mil unidades obtenemos un precio de U$S 6.85 por unidad. Esto significa que si los consumidores demandan 60 mil unidades esperarían un precio de U$S 6.85 por unidad.

c) Para determinar la cantidad que se espera sea demandada si el precio es de U$S 13 por unidad, tendríamos que resolver la siguiente ecuación:

$$13 = \frac{2000.85315}{q^{1.38649}}$$

De la cual obtenemos el siguiente resultado:

$$q^{1.38649} = \frac{2000.85315}{13}$$

$$q = \left(\frac{2000.85315}{13}\right)^{\frac{1}{1.38649}}$$

$$q \approx 37.806$$

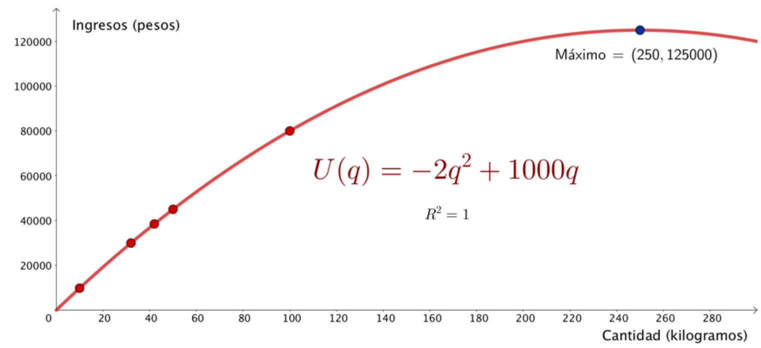
Esto indica que se espera sean demandadas 37806 unidades del producto.

También podríamos ingresar en la barra de entrada de GeoGebra la función $y = 13$ y buscar la intersección con la ecuación de demanda, o resolver la ecuación en Cálculo Simbólico.

La información que arroja este último cálculo indica que para una cantidad de 37806 unidades los consumidores pretenderían que el precio por unidad sea de 13 dólares.

Problema 15:

Realizamos, en primera instancia, un ajuste apropiado que nos permita determinar los ingresos en función de la cantidad de productos producidos y vendidos. Este modelo se encuentra en la siguiente representación gráfica:



a) Por tratarse de una función polinómica de segundo grado tiene un máximo (matemáticamente es el vértice de la parábola) y se encuentra para 250 kilogramos.

b) El ingreso máximo se logra con los 250 kilogramos y resulta de $125000.

c) La cantidad de productos que harían nulo el ingreso corresponde, matemáticamente, a las raíces de la función de segundo grado. En este caso tendremos:

$$-2q^2 + 1000q = 0$$

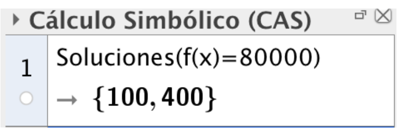
$$-2q \cdot (q - 500) = 0$$

De esta última ecuación se obtienen dos valores, $q_1 = 0$ y $q_2 = 500$. Determinar estos valores tiene sentido parcial, pues la empresa no produciría cantidades cercanas a los 500 kilogramos, pues tendría ingresos nulos, sumado a que los ingresos por ventas debieran crecer al aumentar la cantidad, siempre y cuando existan cantidades demandas

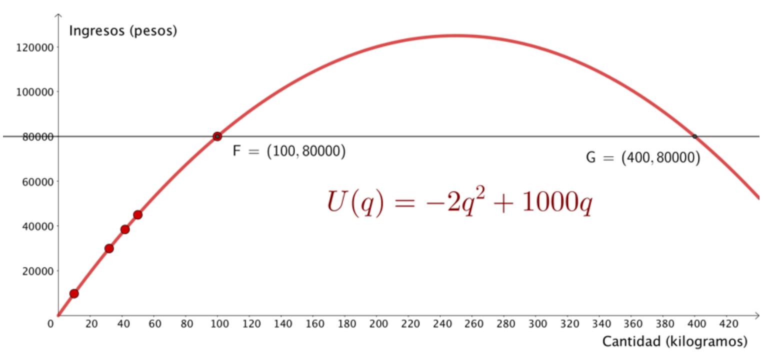
d) Para determinar cantidades que producen ingresos de $ 80000, resolvemos la siguiente ecuación

$$-2q^2 + 1000q = 80000$$

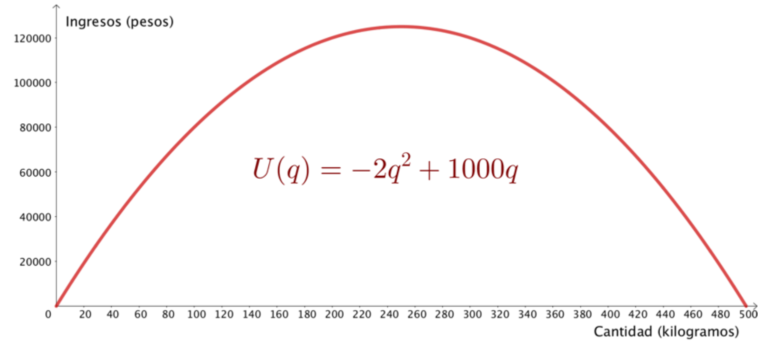
Lo cual arroja como soluciones 100 y 400 kilogramos. Estos valores también se pueden calcular en GeoGebra en Cálculo Simbólico:



También podemos ingresar por barra de entrada la función y=80000 y encontrar la intersección con la función de Ingresos.



e) Gráfica de la función.



El resto de los ejercicios del Práctico 1 son reservados para discusión en clase.

Respuestas al Trabajo Práctico Nº 2

Problema 1. El análisis del tipo de relación que vincula a las magnitudes es:

Inversa

Número de obreros	Tiempo
80 obreros	42 días
x obreros	30 días

$$\frac{x}{80} = \frac{42}{30} \rightarrow x = 112$$

Se deberán agregar 32 obreros.

Problema 2. El análisis del tipo de relación que vincula a las magnitudes es:

Directa

Superficie	Cantidad de pintura
180 m^2	24 kg
120 m^2	x kg

$$\frac{x}{24} = \frac{120}{180} \rightarrow x = 16$$

Se necesitan 16 kg de pintura.

Problema 3. El análisis del tipo de relación que vincula a las magnitudes es:

Inversa

Cantidad de animales	Tiempo
220 vacas	45 días
450 vacas	x días

$$\frac{x}{45} = \frac{220}{450} \rightarrow x = 22$$

Se podrán alimentar a las 450 vacas durante 22 días.

Problema 4: Se puede plantear regla de tres simple o la siguiente ecuación:

$$x: cantidad\ total\ de\ personas\ encuestadas$$

$$0.20x = 700 \rightarrow x = 3500$$

Fueron encuestadas 3500 personas.

Problema 5. Podemos hacer el cálculo del porcentaje que aportó cada persona sobre el valor del número. Así, quien aportó $800 le corresponde:

$$\frac{800}{2000} = 0.4 \rightarrow 40\%$$

Por lo tanto, la persona que aportó el resto de dinero le corresponde el 60% del premio. Como el premio es de $ 120.000, quien aportó el 40% le corresponde $ 48.000, mientras que el que aportó el 60% le corresponde $ 72.000.

También podríamos resolverlo planteando proporciones. Consideremos las siguientes variables:

x: dinero que le corresponde a quien aportó $800

y: dinero que le corresponde a quien aportó $1200

Podemos armar las siguientes proporciones:

$$\frac{120.000}{800 + 1200} = \frac{x}{800} = \frac{y}{1200}$$

Resolviendo arroja que $x = 48.000$, $y = 72.000$.

Problema 6. El aporte total de los tres socios es de U$S 160.000. Quien puso U$S 70.000 aportó el 43,75%, razón por la cual le corresponde ese porcentaje de las ganancias, esto es, U$S 105.000.

El que puso U$S 40.000 aportó el 25%, en consecuencia, le corresponde U$S 60.000 de las ganancias. Finalmente, quien puso los U$S 50.000, aportó el 31,25% y le corresponde U$S 75.000 de las ganancias.

También podríamos resolverlo planteando proporciones. Consideremos las siguientes variables:

x: dinero que le corresponde al socio que aportó U$S70.000

y: dinero que le corresponde al socio que aportó U$S40.000

z: dinero que le corresponde al socio que aportó U$S50.000

Podemos armar las siguientes proporciones:

$$\frac{240.000}{70.000 + 40.000 + 50.000} = \frac{x}{70.000} = \frac{y}{40.000} = \frac{z}{50.000}$$

Resolviendo arroja que $x = 105.000$, $y = 60.000$, $z = 75.000$

Problema 7. Consideremos las siguientes variables:

x: dinero que pierde el socio que hace 11 meses está en el negocio

y: dinero que pierde el socio que hace 10 meses está en el negocio

z: dinero que pierde el socio que hace 11 meses está en el negocio

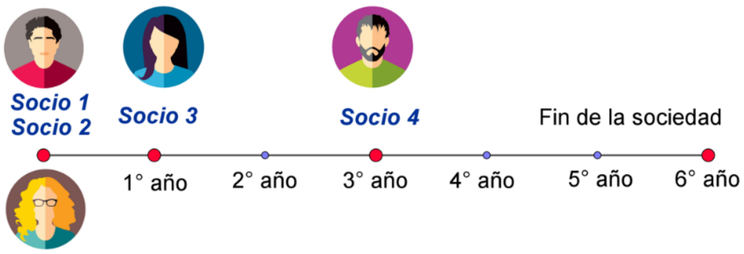
Podemos armar las siguientes proporciones:

$$\frac{15000}{11+10+9}=\frac{x}{11}=\frac{y}{10}=\frac{z}{9}$$

Si resolvemos, obtenemos $x=5500$, $y=5000$, $x=4500$.

Esto significa que el socio más antiguo pierde \$5500, el que estuvo 10 meses en el negocio \$ 5000 y el que permaneció menos tiempo termina perdiendo \$4500.

Problema 8. Si hacemos un esquema, en una línea de tiempo, que refleje la información suministrada en el problema tendremos:



En consecuencia, los Socio 1 y Socio 2 permanecieron 6 años cada uno en la sociedad. El Socio 3 permaneció 5 años, mientras que el Socio 4 estuvo 3 años. Como el reparto del beneficio debe ser proporcional, tendremos las siguientes proporciones:

$$\frac{1100000}{6+6+5+3}=\frac{Socio\ 1}{6}=\frac{Socio\ 2}{6}=\frac{Socio\ 3}{5}=\frac{Socio\ 4}{3}$$

Si resolvemos, obtenemos que el Socio 1 y Socio 2 tendrían que recibir \$ 330.000 cada uno. El Socio 3 recibe \$ 275.000 mientras que el Socio 4 le corresponde \$ 165.000.

Problema 9. El análisis del tipo de relación que vincula a las magnitudes es:

Directa

Días	Horas diarias	Gasto
10	8	\$ 12000
18	9	x

Directa

$$\frac{x}{12000}=\frac{9}{8}\cdot\frac{18}{10}$$

Resolviendo tenemos que $x=24300$. Es decir, el motor gastará \$ 24.300 funcionando durante 18 días a razón de 9 horas diarias.

Problema 10. El análisis del tipo de relación que vincula a las magnitudes es:

Inversa

Inversa

Tiempo	Cantidad de canillas	Caudal	Horas diarias
3 días	2	20 litros/hora	6
x	4	18 litros/hora	5

Inversa

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{4} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{6}{5}$$

Resolviendo tenemos que $x = 2$. Es decir, en 2 días se lograría llenar la misma pileta teniendo el doble del número de canillas, pero arrojando menor caudal y con menos cantidad de horas por día.

Problema 11. Consideremos las siguientes variables:

x: aporte del municipio que tiene 17.500 habitantes

y: aporte del municipio que tiene 62.500 habitantes

Por tratarse de un reparto proporcional, armamos las siguientes proporciones:

$$\frac{60.000.000}{17.500 + 62.500} = \frac{x}{17.500} = \frac{y}{62.500}$$

Resolviendo arroja que $x = 13.125.000, y = 46.875.000$. En consecuencia, el municipio que tiene menos cantidad de habitantes tendría que aportar $ 13.125.000 y el otro, $ 46.875.000

Problema 12. Consideremos las siguientes variables:

x: dinero que recibe el hijo de 7 años

y: dinero que recibe el hijo de 10 años

z: dinero que recibe el hijo de 11 años

w: dinero que recibe el hijo de 12 años

Por tratarse de un reparto proporcional, tenemos:

$$\frac{4000}{7 + 10 + 11 + 12} = \frac{x}{7} = \frac{y}{10} = \frac{z}{11} = \frac{w}{12}$$

Resolviendo obtenemos que $x = 700, y = 1000, z = 1100, w = 1200$. Esto corresponde al dinero que recibe cada uno de los hijos. Si en lugar de $4000 se reparten $4400, tendríamos la siguiente ecuación:

$$\frac{4400}{7 + 10 + 11 + 12} = \frac{x}{7} = \frac{y}{10} = \frac{z}{11} = \frac{w}{12}$$

Si resolvemos para x, que representa el dinero que recibe el hijo menor, nos arroja el valor de $770, el cual es un 10% más que lo recibido anteriormente. En consecuencia, el hijo menor no se ve perjudicado y el reparto es adecuado.

Problema 13. El análisis del tipo de relación que vincula a las magnitudes es:

Directa

Distancia	Consumo
152 km	16 litros
76 km	x litros

Se trata de una proporción directa, en consecuencia:

$$\frac{x}{16} = \frac{76}{152} \rightarrow x = 8$$

El auto consumirá unos 8 litros. Se podría haber hecho la deducción de manera directa, pues la distancia a recorrer es la mitad de lo recorrido y, en consecuencia, el consumo debería ser la mitad.

Problema 14. En primer lugar, encontramos la función de Utilidades:

$$Utilidades = Ingresos\ por\ Ventas - Costo\ Total$$

$$U = 17q - (12{,}20q + 195000)$$

$$U = 4{,}8q - 195000$$

Planteamos a continuación la siguiente desigualdad:

$$4{,}8q - 195000 \geq 150000$$

$$q \geq 71875$$

Esto nos dice que al menos hay que producir 71.875 unidades del producto.

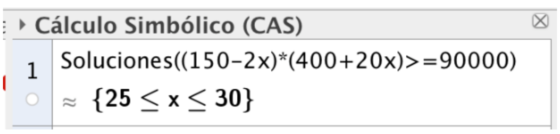
Problema 15. Realizamos una tabla de valores que nos muestre el comportamiento entre las variables, y a partir de ella, buscamos deducir el modelo general (también se podría hacer un ajuste con GeoGebra.

Número de aumentos	Cantidad de oficinas	Monto de alquiler	Ingresos por alquiler
0	150	400	60.000
1	148	420	62.160
2	146	440	64.240
3	144	460	66.240

Esto nos lleva al planteo de la siguiente desigualdad:

$$(150 - 2x) \cdot (400 + 20x) \geq 90000$$

La resolución de la desigualdad, usando software, resulta:

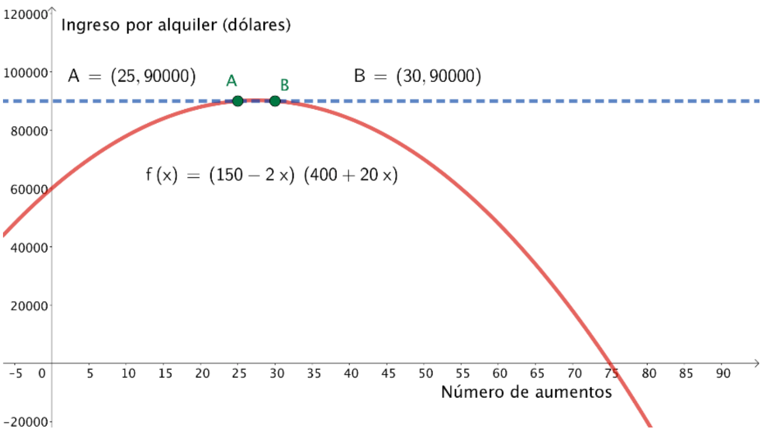


Como la variable indica el número de aumentos, tiene que ser un número entero. Podríamos tener las siguientes posibilidades para el precio del alquiler:

Pegar el contenido del Portapapeles	Cantidad de oficinas	Monto de alquiler	Ingresos por alquiler
25	100	900	90000
26	98	920	90160
27	96	940	90240
28	94	960	90240
29	92	980	90160
30	90	1000	90000

La respuesta no es única y las posibilidades de precios de alquiler son 6.

También podríamos haber resuelto el problema de forma gráfica, como se muestra en la siguiente imagen. En ella se graficó la función y se incorporó la recta y=90000, para luego buscar la intersección entre curvas. Se puede apreciar que, para los valores de la variable independiente, comprendidos entre 25 y 30, la curva de ingresos por alquiler se encuentra de 90000 para arriba.



Problema 16. Definimos la variable que interviene en el problema:

x: precio original de las zapatillas

Planteamos la siguiente ecuación y su resolución:

$$x - 0{,}24x = 3382$$

$$0{,}76x = 3382$$

$$x = \frac{3382}{0{,}76}$$

$$x = 4450$$

El precio original de las zapatillas es $ 4450,00

Problema 17. Definimos la variable que interviene en el problema:

x: precio de la entrada

Planteamos la siguiente desigualdad y su resolución:

$$5000 + 0{,}5 \cdot 300 \cdot x \leq 11600$$

$$150x \leq 11600 - 5000$$

$$x \leq \frac{6600}{150}$$

$$x \leq 44$$

Se podrá cobrar una entrada de hasta $ 44 para que sea más conveniente la primera de las bandas.

Problema 18. Definimos la variable que interviene en el problema:

x: total de ventas de la compañía

Planteamos la siguiente desigualdad y su resolución:

$$Salario\ Plan\ A < Salario\ Plan\ B$$

$$15500 + 0{,}04x < 17500 + 0{,}05(x - 200000)$$

$$15500 + 0{,}04x < 17500 + 0{,}05x - 10000$$

$$15500 + 0{,}04x < 0{,}05x + 7500$$

$$15500 - 7500 < 0{,}05x - 0{,}04x$$

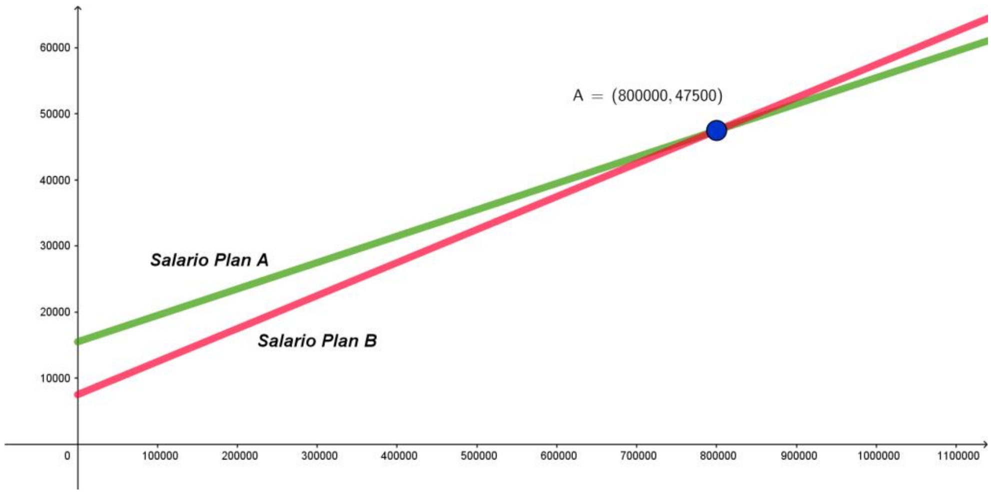
$$8000 < 0{,}01x$$

$$\frac{8000}{0{,}01} < x$$

$$x > 800000$$

Para que resulte mejor el Plan B que el Plan A, las ventas deben ser superiores a los $ 800.000.

También podríamos ver la solución del problema pensando en representaciones gráficas de las dos funciones que representan los salarios. Podemos advertir que hasta los $ 800.000 conviene el salario del plan A, mientras que, desde ese valor de ventas, es más conveniente el salario del plan B.



Problema 19. En primer lugar, encontramos la función de Utilidades:

$$Utilidades = Ingresos\ por\ Ventas - Costo\ Total$$

$$U = 20q - (15q + 600000)$$

$$U = 20q - 15q - 600000$$

$$U = 5q - 600000$$

Como la compañía quiere obtener al menos $ 100.000 de utilidades, tenemos la siguiente desigualdad:

$$5q - 600000 > 100000$$

$$5q > 100000 + 600000$$

$$q > \frac{700000}{5}$$

$$q > 140000$$

Esto nos dice que deben ser vendidas al menos 140000 unidades del producto.

Problema 20. Definimos la variable que interviene en el problema:

x: total de tornillos a producir por la fábrica

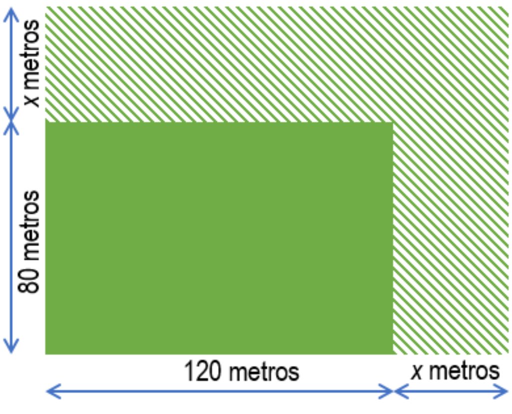
Planteamos la siguiente desigualdad y su resolución:

$$x - 0{,}03x \geq 2000000$$

$$0{,}97x \geq 2000000$$

$$x \geq 2061855{,}67$$

Esto nos dice que al menos hay que producir 2.061.856 tornillos para satisfacer la cantidad demandada, sabiendo que aproximadamente un 3% de ellos son rechazados por imperfecciones.

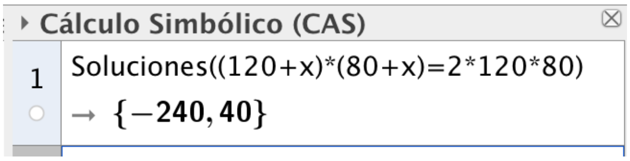


Problema 21. Una representación gráfica de lo descripto en el problema resulta ser la siguiente:

En consecuencia, si x denota el ancho de la franja, tendremos la siguiente ecuación:

$$(120 + x) \cdot (80 + x) = 2 \cdot 120 \cdot 80$$

La resolución de la ecuación tiene por solución:



Como el valor de la variable tiene que ser positivo, la franja tendrá que tener un ancho de 40 metros.

Problema 22. Planteamos la siguiente ecuación:

$$800 - 2^p = 60$$

Aplicando propiedades y trabajando algebraicamente tendremos:

$$800 - 60 = 2^p$$

$$740 = 2^p$$

$$log\,(740) = p \cdot log\,(2)$$

$$\frac{log\,(740)}{log\,(2)} = p$$

$$p \approx 9.53$$

El precio resulta ser de $ 9.53

Problema 23. Queda determinada la siguiente ecuación:

$$ln\,(2q^5)\ + 20 = 60$$

Aplicando propiedades se tiene:

$$ln\,(2q^5)\ = 40$$

$$2q^5 = e^{40}$$

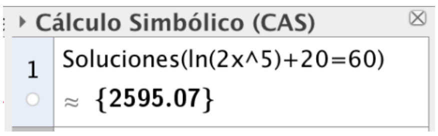
$$q^5 = \frac{e^{40}}{2}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{e^{40}}{2}}$$

$$q \approx 2595$$

En consecuencia, 2595 unidades producen un costo de U$S 60000.

Si la resolución de la ecuación la realizamos con GeoGebra tendremos la misma solución.



Problema 24.

a. Para determinar el precio por unidad que ofrecerá el fabricante cuando oferta 500 unidades, nos lleva a sustituir este valor en la ecuación de demanda.

$$p = log\left(10 + \frac{500}{2}\right)$$

$$p = log(260)$$

$$p \approx 2.41$$

Esto es, ofrecerá 500 unidades a un precio de U$S 2.41

b. Si el precio que oferta el comerciante es de U$S 3.10 por unidad, queda establecida la siguiente ecuación:

$$log\left(10 + \frac{q}{2}\right) = 3.10$$

Aplicando propiedades resulta:

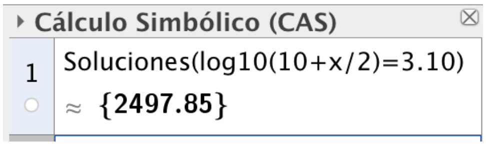
$$10 + \frac{q}{2} = 10^{3.10}$$

$$\frac{q}{2} = 10^{3.10} - 10$$

$$q = 2(10^{3.10} - 10)$$

$$q \approx 2498$$

En GeoGebra la resolución sería la siguiente:



Quiere decir que el comerciante estaría ofreciendo 2498 unidades a un precio de U$S 3.10 cada una.

Problema 25. Si t representa el tiempo de cada plan de telefonía celular, medido en minutos, tenemos que buscar los valores que satisfacen la siguiente desigualdad:

Costo del plan A > *Costo del plan B*

$$10 + 0.20t > 20 + 0.12t$$

La resolución de la desigualdad matemáticamente arroja como resultado: $t > 125$. En consecuencia, la respuesta para el problema será que el plan B es más barato que el plan A si se usa el servicio por más de 125 minutos mensuales.

Problema 26. El planteo de la situación nos lleva a la siguiente desigualdad:

Inversión en bonos del estado + *inversión en bonos hipotecarios* > 3900

Ahora bien, si designamos con x a la cantidad de dinero que invierte esta persona en bonos del estado, entonces tendrá que colocar la diferencia de dinero en bonos hipotecarios, o sea, $55000 - x$. La desigualdad anterior queda conformada de la siguiente manera:

$$0.06x + (55000 - x)0.09 > 3900$$

La resolución de esta desigualdad, matemáticamente arroja que el conjunto solución es

$x < 35000$. Esto nos dice que esta persona tendrá que invertir hasta U$S 35000 en bonos del estado para lograr su propósito.

Problema 27. La expresión que modeliza la situación problemática es la siguiente:

$$Ingresos\ por\ ventas \geq 1200$$

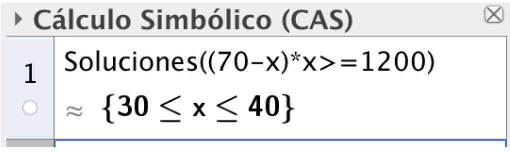
$$precio\ \times cantidad \geq 1200$$

Como el precio está regulado por la ecuación de demanda, es equivalente a expresar:

$$demanda\ \times cantidad \geq 1200$$

$$(70 - q).q \geq 1200$$

La solución matemática de esta desigualdad arroja el siguiente conjunto solución:

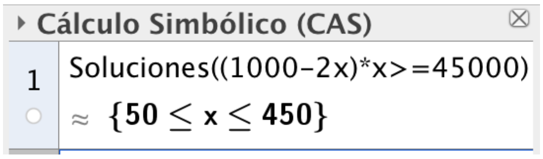


En consecuencia, se tendría que estar vendiendo entre 30 y 40 paquetes de software a la semana.

Problema 28. Planteando una resolución análoga al problema anterior resulta

$$(1000 - 2q).q \geq 45000$$

La solución matemática de esta desigualdad arroja el siguiente conjunto solución:



Esto nos dejaría como solución que la cantidad de televisores a vender debe ser de 50 a 450. Ahora bien, como el precio no puede ser menor a los U$S 300, esto implica que la ecuación de demanda debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$(1000 - 2q) \geq 300$$

La resolución matemática de la misma establece que el conjunto solución son los valores $q \leq 350$.

Como repuesta final tenemos que la cantidad de televisores tipo *Smart* que deben ser vendidos para cumplir con las condiciones del problema se encuentra entre 50 y 350.

Problema 29. La expresión que modeliza la situación problemática es la siguiente:

$$Utilidades \geq 13200$$

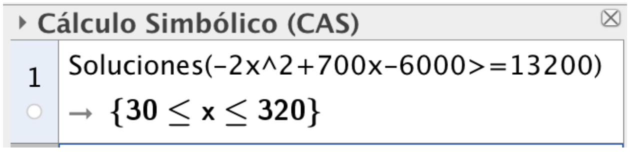
$$Ingresos\ por\ ventas - Costos\ totales \geq 13200$$

$$(1000 - 2q).q - (6000 + 300q) \geq 13200$$

$$1000q - 2q^2 - 6000 - 300q) \geq 13200$$

$$-2q^2 + 700q - 6000 \geq 13200$$

La solución matemática de esta desigualdad arroja como solución el siguiente conjunto de números reales:



Si tenemos en cuenta todas las restricciones impuestas al problema, deberían producirse y venderse entre 30 y 320 televisores Smart para cumplir con el propósito.

Problema 30. La expresión que modeliza la situación problemática es la siguiente:

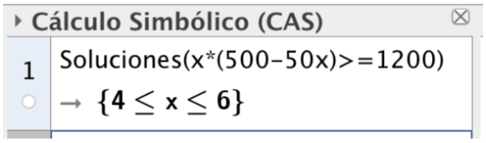
$$Ingresos\ por\ ventas \geq 1200$$

$$precio\ \times cantidad \geq 1200$$

Como la cantidad y el precio están relacionados por la ecuación de demanda, tendremos:

$$p.(500 - 50p) \geq 1200$$

La solución matemática de esta desigualdad arroja el siguiente conjunto solución:



En consecuencia, se tendría que estar vendiendo las frutillas entre U$S 4 y U$S 5 el kilogramo para cumplir con su cometido.

Problema 31. Si definimos las variables que intervienen en el problema tendremos:

x: Costo del primer objeto

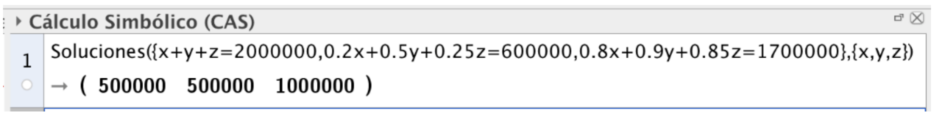
y: Costo del segundo objeto

z: Costo del tercer objeto

Esto nos lleva a plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{x + y + z = 2000000\ 0{,}20x + 0{,}50y + 0{,}25z = 600000\ 0{,}80x + 0{,}90y + 0{,}85z = 1700000$$

La resolución del sistema arroja la siguiente solución:



Esto nos dice que dos de los objetos costaron medio millón de euros y otro, un millón de euros.

Problema 32. Si definimos las variables que intervienen en el problema tendremos:

x: Cantidad de días que permaneció en Inglaterra

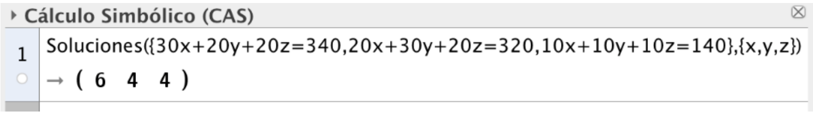
y: Cantidad de días que permaneció en Francia

z: Cantidad de días que permaneció en Italia

Esto nos lleva a plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 30x + 20y + 20z = 340 \\ 20x + 30y + 20z = 320 \\ 10x + 10y + 10z = 140 \end{cases}$$

La resolución del sistema arroja la siguiente solución:



Esto nos dice que permaneció 6 días en Inglaterra, 4 días en Francia y 4 días en Italia.

Problema 33. Si definimos las variables que intervienen en el problema tendremos:

x: Cantidad solicitada por el primer establecimiento

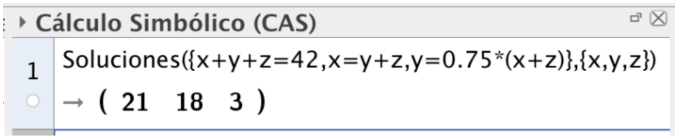
y: Cantidad solicitada por el segundo establecimiento

z: Cantidad solicitada por el tercer establecimiento

Esto nos lleva a plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 42 \\ x = y + z \\ y = 0{,}75(x + z) \end{cases}$$

La resolución del sistema arroja la siguiente solución:



El primer establecimiento pidió 21 unidades, el segundo 18 y el tercero 3.